

تحلیل احتمالاتی دو متغیره تغییرات زمانی فشار آب منفذی در حین فرآیند تحکیم پی سازه

امیر ملک پور^{۱*}، نیما صادقیان^۲، محمدجواد فرخی^۳

۱- استادیار گروه مهندسی آب، دانشکده علوم کشاورزی، دانشگاه گیلان

۲- دانش آموخته کارشناسی ارشد گروه مهندسی آب، گرایش سازه های آبی، دانشکده علوم کشاورزی، دانشگاه گیلان

۳- دانشجوی گروه مهندسی آب، دانشکده علوم کشاورزی، دانشگاه گیلان

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۸/۰۲

چکیده

در تحلیل احتمالاتی پدیده تحکیم خاک، نقش عدم قطعیت متغیرهای هیدرولیکی و ژئوتکنیکی و همبستگی میان مقادیر آنها از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در تحقیق حاضر، فرضیه تاثیر همبستگی متغیرهای تصادفی هدایت هیدرولیکی و ضریب قابلیت فشردگی حجمی بر تغییرات زمانی تحلیل احتمالاتی تحکیم خاک مورد بررسی قرار می-گیرد. نکته حائز اهمیت این است که در صورت تأیید تاثیر همبستگی متغیرهای تصادفی مورد بررسی، بررسی نقش آنها به صورت منفرد موجب خطا در تعیین تغییرات زمانی تحکیم خاک می شود. بدین جهت در تحقیق حاضر، یک برنامه رایانه ای در محیط MATLAB توسعه داده شد و از حل عددی معادله دیفرانسیل تحکیم خاک، به عنوان راه حل پایه در روش احتمالاتی شبیه سازی مونت کارلو استفاده گردید. سپس تأثیر اعمال همبستگی هدایت هیدرولیکی و ضریب قابلیت فشردگی حجمی به عنوان دو متغیر تصادفی تاثیرگذار، با استفاده از توابع کاپولا مختلف و در قالب تحلیل احتمالاتی دو متغیره تحکیم خاک در منطقه شفت استان گیلان بررسی شد. نتایج نشان داد که بهترین توزیع منفرد برازش داده شده بر هر یک از متغیرهای تصادفی مذکور، گوسی معکوس بوده در حالی که با اعمال تاثیر همبستگی، بهترین توزیع احتمالاتی مشترک از تابع کاپولا گوسی حاصل می گردد. همچنین خطای ناشی از عدم اعمال همبستگی متغیرهای تصادفی بر پدیده تحکیم، در عمق های خاک ۲ و ۴ متر به ترتیب ۷ و ۲/۲ درصد به دست آمد. در انتها نتایج نشان داد که در شرایط عدم اعمال همبستگی متغیرهای تصادفی مورد بررسی در این تحقیق، سرعت پدیده تحکیم بیشتر از حالت اعمال همبستگی این متغیرها برآورد می گردد.

واژه های کلیدی: تحلیل احتمالاتی مشترک، خاک ریزدانه، روش مونت کارلو، توابع کاپولا

مقدمه

شوشتری و همکاران (Khalaf-Shoushtari *et al.*, 2017) و سایر تحقیقات (Bahrami *et al.*, 2021; Torfi *et al.*, 2021) اشاره نمود. از سوی دیگر برخی از محققان استفاده از روش های محاسباتی پیشرفته همچون یادگیری ماشین را در مسائل ژئوتکنیک بکار بردند (Benemran & Esmaeili, 2023). (Falak, 2023).

گریفیتس و فنتون (Griffiths & Fenton, 2009) نشست خاک در زیر پی های نواری را با استفاده از روش اجزای محدود تصادفی شامل ترکیب دو روش گشتاور دوم مرتبه اول (FOSM²) و شبیه سازی مونت کارلو برآورد نمودند. نتایج مطالعه آن ها، معایب هر یک از روش های احتمالاتی به کار رفته در اعمال همبستگی مکانی متغیرهای تصادفی را آشکار کرد. وانگ و همکاران (Wang *et al.*, 2013) تحلیل احتمالاتی نشست تحکیمی پی سازه را با ترکیب روش های LS-SVM³ و شبیه سازی مونت کارلو انجام دادند. نتایج پژوهش آن ها ثابت نمود که روش ترکیبی به کار رفته در تحلیل نشست پی های متشکل از خاک های نرم کاربرد مناسبی دارد. برخی از محققان از تحلیل احتمالاتی علاوه بر تعیین نشست تحکیمی در برآورد ظرفیت باربری پی نیز استفاده نموده اند. برای مثال، زمردیان و زرنگ-ثانی (Zomorodian & Zerangani, 2015) با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو، تأثیر عدم قطعیت پارامترهای مؤثر بر تعیین ظرفیت باربری پی های نواری را مورد ارزیابی قرار دادند. نتایج مطالعه آن ها حاکی از کاهش مقادیر ضریب اطمینان ظرفیت باربری در روش تحلیل احتمالاتی در مقایسه با روش قطعی می باشد. چنگ و همکاران (Cheng *et al.*, 2019) روش های مختلف سازه های بر پی های متشکل از خاک های ریزدانه اشباع، افزایش فشار آب منفذی را به دنبال داشته که طی فرآیند زهکشی، اضافه فشار ایجاد شده مستهلک گردیده و نشست تحکیمی خاک رخ می دهد. از مهم ترین پیامدهای تحکیم خاک می توان به فرونشست زمین، تخریب ابنیه و پوشش بتنی کانال ها در شبکه های آبیاری و زهکشی، پدیده روگذری آب از سدهای خاکی تحت تاثیر نشست تحکیمی پی و بدنه سد، شکستگی لوله های خطوط آبرسانی و تخریب پوشش آسفالتی جاده ها اشاره نمود. یکی از نکات مهم در تحلیل پدیده تحکیم و بسیاری از مسائل مهندسی ژئوتکنیک، بررسی تاثیر عدم قطعیت متغیرهای ژئوتکنیکی و تغییرات مکانی آنها می باشد. از این رو، امروزه استفاده از تحلیل های احتمالاتی مبتنی بر عدم قطعیت به عنوان جایگزین تحلیل های قطعی در میان بسیاری از محققان این حوزه متداول گردیده است (Wang *et al.*, 2020; Alibeikloo *et al.*, 2019; Charoosaei *et al.*, 2021). به عنوان مثال، نور و همکاران (Nour *et al.*, 2007) تحکیم اولیه در خاک های غیرهمگن را با استفاده از ترکیب روش لایه نازک¹ (TLM) و روش احتمالاتی شبیه سازی مونت کارلو مورد بررسی قرار دادند. نتایج تحقیق آنها نشان داد که غیرهمگنی خاک به طور چشم گیری می تواند موجب تأخیر در اتلاف فشار آب منفذی و به تبع آن، کاهش سرعت فرآیند تحکیم خاک گردد. در این میان برخی از محققان اثر عوامل شیمیایی و اصلاح خاک را بر رفتار تحکیمی دارای عدم قطعیت خاک بررسی نمودند که می توان به تحقیق خلف-

شوشتری و همکاران (Khalaf-Shoushtari *et al.*, 2017) و سایر تحقیقات (Bahrami *et al.*, 2021; Torfi *et al.*, 2021) اشاره نمود. از سوی دیگر برخی از محققان استفاده از روش های محاسباتی پیشرفته همچون یادگیری ماشین را در مسائل ژئوتکنیک بکار بردند (Benemran & Esmaeili, 2023). (Falak, 2023).

3 Least-Squares Support Vector Machine

1 Thin Layer Method

2 First-Order Second-Moment Method

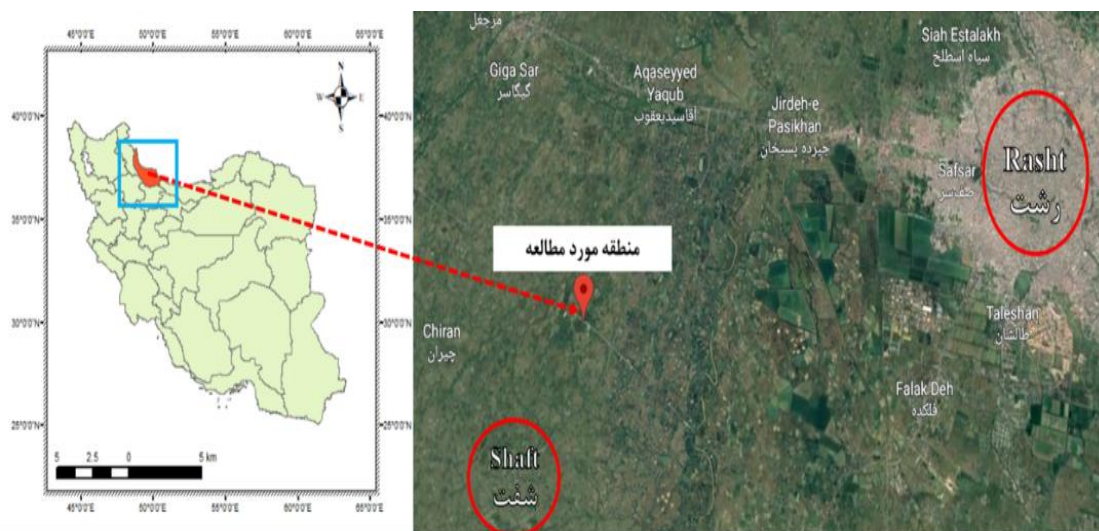
از تاثیر همبستگی متغیرهای تصادفی مؤثر، اغلب منجر به تخمین غیرواقعی و نادرست از احتمال ناپایداری پی می‌شود. همچنین در تحقیقات گذشته ارائه روشی در زمینه برآورد احتمال تحکیم با احتساب پیچیدگی و همبستگی میان متغیرهای مؤثر و در عین حال ساده و کاربردی برای مهندسان طراح به عنوان یک خلاء محسوب می‌گردد. بر این اساس در تحقیق حاضر، فرضیه تاثیر همبستگی میان متغیرهای تصادفی هدایت هیدرولیکی و ضریب قابلیت فشرده‌گی حجمی بر تغییرات زمانی تحلیل احتمالاتی تحکیم خاک مورد بررسی قرار می‌گیرد. نکته حائز اهمیت این است که در صورت تأیید تاثیر همبستگی متغیرهای تصادفی مورد بررسی، بررسی نقش آنها به صورت منفرد موجب خطا در تعیین تغییرات زمانی تحکیم خاک می‌شود. امروزه در تحلیل‌های احتمالاتی در علوم مختلف شامل مهندسی عمران و محیط زیست، به منظور اعمال همبستگی متغیرهای تصادفی و ایجاد توزیع احتمالاتی مشترک این متغیرها عمدتاً از توابع کاپولا استفاده می‌گردد (Kilgore & Thompson, 2011; Zhang *et al.*, 2017; Yang *et al.*, 2015). از این رو، به عنوان هدف و نوآوری در تحقیق حاضر، تاثیر همبستگی متغیرهای تصادفی مؤثر بر تحلیل احتمالاتی پدیده تحکیم در قالب ارائه یک برنامه رایانه‌ای با قابلیت تعیین بهترین تابع کاپولا بررسی می‌شود. این برنامه می‌تواند به مهندسان عمران و آب در زمینه برآورد احتمال نزدیک‌تر به واقعیت در خصوص امکان وقوع نشست‌های تحکیمی غیرمجاز با گذشت زمان در ابنیه و سازه‌های شبکه‌های آبیاری و زهکشی کمک نماید. به این منظور، برنامه رایانه‌ای مذکور در محیط MATLAB توسعه داده شده و نتایج کاربرد توابع کاپولا مختلف در یک مطالعه موردی در حومه شهرستان شفت استان گیلان مطالعه می‌گردد.

(al., 2017) با اعمال تاثیر دو عامل جریان آب در محیط متخلخل و تغییر شکل خاک به عنوان متغیرهای تصادفی، به بررسی احتمالاتی پدیده نشست پرداختند. نتایج مطالعه آنها نشان داد که نشست در لایه‌های سطحی خاک نسبت به لایه‌های زیرین از عدم قطعیت بیش‌تری برخوردار است. ملک‌پور و همکاران (Malekpour *et al.*, 2018) با کاربرد روش مونت کارلو و هدایت هیدرولیکی خاک به عنوان متغیر تصادفی، تاثیر افزایش تعداد نمونه تصادفی هدایت هیدرولیکی بر تحلیل احتمالاتی پدیده تحکیم خاک را مورد بررسی قرار دادند. نتایج پژوهش آنها نشان داد که افزایش تعداد نمونه تاثیر چشم‌گیری بر توزیع احتمالاتی فشار آب منفذی نداشته اما با افزایش زمان، منحنی توزیع احتمالاتی فشار آب منفذی هموارتر و به تبع آن عدم قطعیت بیش‌تر می‌شود. همچنین در مطالعه‌ای دیگر، ملک‌پور و همکاران (Malekpour *et al.*, 2019) به بررسی قابلیت فشرده‌گی حجمی خاک به عنوان متغیر تصادفی، و تاثیر عدم قطعیت آن بر تغییرات زمانی توزیع فشار آب منفذی در حین تحکیم خاک پرداختند. نتایج مطالعه آنها حاکی از آن بود که با گذشت زمان از آغاز فرآیند تحکیم مشابه کاربرد متغیر تصادفی هدایت هیدرولیکی، افزایش عدم قطعیت در مقادیر فشار آب منفذی مشاهده می‌گردد. به طور کلی در دو تحقیق اخیر، متغیرهای تصادفی هدایت هیدرولیکی و ضریب قابلیت فشرده‌گی حجمی خاک تاثیر قابل توجهی بر پدیده تحکیم نشان داد. اما در دو تحقیق اشاره شده و سایر تحقیقات پیشین کم‌تر به نقش همبستگی میان پارامترهای ژئوتکنیکی مؤثر بر پدیده تحکیم توجه گردیده است. این در حالیست که طبق نظر محققان (Aguilar-López *et al.*, 2014) چشم‌پوشی

مواد و روشها

برداشت شده از زمینی به وسعت ۸ هکتار واقع در حد فاصل شهرهای رشت و شفت در استان گیلان (شکل ۱) و در آزمایشگاه مرجع مکانیک خاک استان گیلان حاصل گردید. داده های به دست آمده از این نمونه های خاک شامل دانه بندی، هدایت هیدرولیکی و نتایج آزمایش تحکیم مربوط به ۲۴ گمانه مطالعه شده در تحقیق ملکپور و همکاران (Malekpour *et al.*, 2018) و ملکپور و همکاران (Malekpour *et al.*, 2019) می باشند.

در تحقیق حاضر، یک برنامه رایانه ای در محیط برنامه نویسی MATLAB توسعه داده شد و تاثیر همبستگی متغیرهای تصادفی هدایت هیدرولیکی و قابلیت فشردگی حجمی خاک بر عدم قطعیت پدیده تحکیم با استفاده از توابع کاپولا مختلف و روش احتمالاتی شبیه سازی مونت کارلو مورد مطالعه قرار گرفت. مقادیر متغیرهای تصادفی، از نمونه های خاک



شکل ۱- منطقه مورد مطالعه

Figure 1- The study area

متغیرهای تصادفی مؤثر در مسائل ژئوتکنیکی، اغلب منجر به تخمین غیرواقعی و نادرست از احتمال پدیده مورد بررسی می شود. به عبارت دیگر، در تحلیل های احتمالاتی تک متغیره (بدون اعمال همبستگی) معمولاً شرایط محافظه کارانه و دورتر از واقعیت در نظر گرفته می شود. برای مثال این موضوع از منظر مهندسی می تواند به طراحی پی با ابعاد بزرگتر از نیاز و افزایش هزینه های پروژه بیانجامد. در تحقیق حاضر از توابع کاپولا به منظور اعمال همبستگی متغیرهای تصادفی، تعیین توزیع های احتمالاتی مشترک این متغیرها و انجام

تحلیل احتمالاتی تحکیم با استفاده از توابع کاپولا

عوامل مختلفی همچون فرضیات بکار رفته در مدل های ریاضی، مقادیر متغیرهای تصادفی و خطای انسانی بر عدم قطعیت نتایج تحلیل های ژئوتکنیکی تأثیرگذار است. طبق تحقیقات انجام شده، مقادیر تصادفی متغیرهای خاک در بسیاری از موارد مهم ترین عامل ایجاد عدم قطعیت در تحلیل های ژئوتکنیکی محسوب می گردند (Nadim, 2015). از سوی دیگر، چشم پوشی از تاثیر همبستگی

کاپولا بکار رفته و θ پارامتر تابع کاپولا می‌باشند. در تحقیق حاضر، از توابع کاپولا ارشمیدسی (شامل توابع کلیتون، گامبل و فرانک) و توابع کاپولا بیضوی (شامل توابع گوسی و تی-استیودنت) استفاده گردید تا عملکرد این توابع نسبت به تحلیل احتمالاتی تک‌متغیره رایج استفاده‌شده در تحقیقات گذشته مورد بررسی قرار گیرد. جدول ۱ روابط ریاضی و محدوده هر یک از توابع کاپولا را در حالت کاربرد دو متغیر تصادفی نشان می‌دهد.

تحلیل‌های احتمالاتی چند متغیره استفاده گردید. این توابع برای اولین بار توسط اسکالر (Sklar, 1959) معرفی شده و امکان ترکیب چند توزیع احتمالاتی منفرد متغیرهای تصادفی و ایجاد یک توزیع چند متغیره با اعمال همبستگی میان متغیرها را به وجود آوردند (رابطه ۱).

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = C_\theta[(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_N}(x_N))] \quad (1)$$

که x_1, x_2, \dots, x_N متغیرهای تصادفی موثر بر پدیده و $F_{X_i}(x_i)$ توزیع احتمال تجمعی متغیر x_i تابع C_θ

جدول ۱- روابط ریاضی و محدوده پارامتر توابع کاپولا مختلف (Sadegh et al., 2017)

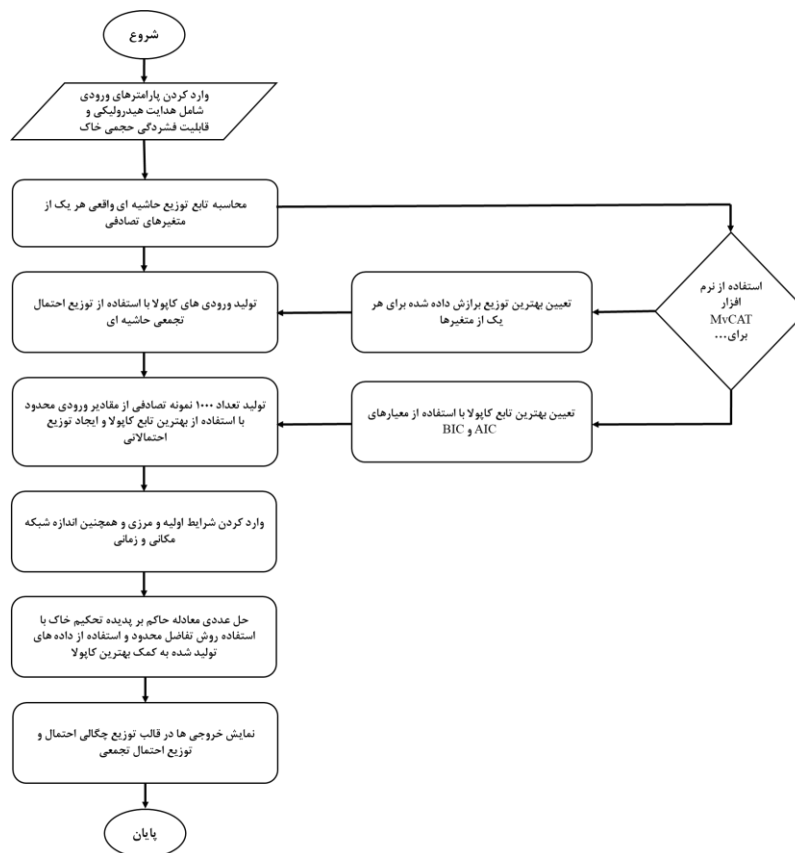
Table 1- Mathematical relationships and parameter ranges of different copula functions (Sadegh et al., 2017)

نام خانواده	نام کاپولا	رابطه ریاضی	محدوده پارامتر کاپولا
تابع کاپولا ارشمیدسی	گامبل	$\exp\{-[(-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\}$	$\theta \in (1, \infty)$
	فرانک	$-\frac{1}{\theta} \ln\left[1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{\exp(-\theta) - 1}\right]$	$\theta \in \mathbb{R} \setminus 0$
	کلیتون	$\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1.0)^{-\frac{1}{\theta}}$	$\theta \in [-1, \infty) \setminus 0$
تابع کاپولا بیضوی	تی-استیودنت	$\int_{-\infty}^{t_{\theta_2}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\theta_2}^{-1}(v)} \frac{\Gamma(\frac{\theta_2+2}{2})}{\Gamma(\frac{\theta_2}{2}) \pi \theta_2 \sqrt{1-\theta_1^2}} \left(1 + \frac{x^2 - 2\theta_1 xy + y^2}{\theta_2}\right)^{-\frac{(\theta_2+2)}{2}} dx dy$	$\theta_1 \in [-1, 1] \text{ \& } \theta_2 \in (0, \infty)$
	گوسی	$\int_{-\infty}^{\theta^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\theta^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(\frac{2\theta xy - x^2 - y^2}{2(1-\theta^2)}\right) dx dy$	$\theta \in [-1, 1]$

انجام تحلیل احتمالاتی دو متغیره تحکیم در برنامه رایانه‌ای توسعه داده شده در تحقیق حاضر را نشان می‌دهد.

در این روابط u و v توزیع‌های احتمال منفرد دو متغیر تصادفی اصلی، \emptyset توزیع استاندارد گوسی و t_{θ_2} تابع کاپولا تی-استیودنت به ازای درجه آزادی θ_2 می‌باشند. فلوجارت ارائه شده در شکل ۲ مراحل

تحلیل احتمالاتی دو متغیره تغییرات زمانی فشار آب منفذی در حین فرآیند تحکیم پی سازه



شکل ۲- فلوجارت برنامه رایانه‌ای توسعه داده شده برای تحلیل احتمالاتی دو متغیره تحکیم

Figure 2- Flowchart of the developed computer program for the bivariate probabilistic analysis of consolidation

(رابطه ۴) به دست آمده و به عنوان تابع مبنا در روش احتمالاتی شبیه‌سازی مونت‌کارلو مورد استفاده قرار گرفت.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$C_v = \frac{K}{\gamma_w M_v} \quad (3)$$

که در این رابطه u ، z و t به ترتیب فشار آب منفذی، عمق و زمان می‌باشند. C_v ضریب تحکیم خاک است که با استفاده از رابطه ۳ برآورد می‌شود. K ، M_v و γ_w و به ترتیب هدایت هیدرولیکی، ضریب قابلیت فشردگی حجمی خاک و وزن مخصوص آب می‌باشند. رابطه ۴ معادله جبری گسسته‌سازی شده

در برنامه رایانه‌ای توسعه داده شده، ابتدا توزیع‌های منفرد هر یک از دو متغیر تصادفی هدایت هیدرولیکی و قابلیت فشردگی حجمی خاک از طریق فایل اکسل داده‌های ورودی به برنامه فراخوانی شد. سپس با استفاده از توابع کاپولا مختلف (در تحقیق حاضر توابع کاپولا ایشمیدسی و بیضوی)، توزیع‌های احتمالاتی مشترک دو متغیر تصادفی محاسبه گردیده و بهترین توابع کاپولا با استفاده از نرم‌افزار MvCAT (Sadegh *et al.*, 2017) جهت انجام محاسبات تعیین شد. در مرحله بعد راه حل عددی معادله دیفرانسیل حاکم بر پدیده تحکیم خاک (روابط ۲ و ۳) به روش تفاضل محدود مرکزی

رفته، پایداری قطعی راه حل عددی از طریق حل دستگاه معادلات حاصل از شبکه‌ی نقاط مورد بررسی در لایه خاک می‌باشد.

$$\frac{c_v \Delta t}{\Delta z^2} (u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + \left(1 + 2 \frac{c_v \Delta t}{\Delta z^2}\right) u_i^{n+1} = u_i^n \quad (4)$$

اطلاعاتی بی‌زی (BIC)^۴، RMSE^۵ و NSE^۶ در نرم-افزار MvCAT رتبه‌بندی گردیدند. شاخص‌های AIC و BIC به عنوان معیارهای اصلی، تعادل بین تعداد پارامترهای مدل و میزان برازش مدل روی داده‌ها را تعیین نموده و به عبارت دیگر با ایجاد تعادل بین پیچیدگی و دقت مدل امکان ارزیابی مناسب از کارایی مدل را فراهم ساختند. بنابراین مدل‌های انتخاب شده توسط این دو معیار نه دارای بیش برازش و نه دارای برازش کم بوده و می‌توان آن‌ها را مدل‌هایی با برازش مناسب معرفی نمود. دو شاخص دیگر (یعنی RMSE و NSE) نیز به منظور تکمیل فرآیند رتبه‌بندی و بررسی و مقایسه با دو معیار اطلاعاتی اصلی برآورد گردیدند. این شاخص‌ها به ترتیب با استفاده از روابط ۵ تا ۸ محاسبه می‌شوند.

$$AIC = 2k - 2Ln(\hat{L}) \quad (5)$$

$$BIC = Kln(n) - 2ln(\hat{L}) \quad (6)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{(x_i - x_j)^2}{n}} \quad (7)$$

$$NSE = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_j)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2} \quad (8)$$

حاصل از حل عددی معادله دیفرانسیل تحکیم (رابطه ۲) را با استفاده از روش تفاضل محدود مرکزی ضمنی^۱ نشان می‌دهد. ویژگی روش به کار

که در آن مقدار اولیه فشار آب منفذی در نقطه مورد بررسی (۴۰۰ کیلوپاسکال طبق نتایج آزمایشات)، u_i^{n+1} و u_{i-1}^{n+1} به ترتیب فشار آب منفذی در نقطه مورد بررسی در زمان Δt و نقاط قبل (i-1) و بعد از آن (i+1) به فاصله Δz می‌باشند. لازم به ذکر است که در آزمایشگاه تغییرات فشار آب منفذی ناشی از بارگذاری در حین تحکیم با استفاده از پیژومترهای موجود در دستگاه تحکیم (ادئومتر) اندازه‌گیری شده و همچنین با استفاده از پارامترهای حاصل از آزمایش مقاومت برشی سه محوری (همچون پارامتر اسکمپتون^۲) به روش نظری محاسبه و کنترل گردیده است.

بر اساس زوج مرتب‌های تصادفی K و Mv ورودی به کد رایانه‌ای توسعه داده شده، ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی از بهترین توزیع‌های احتمالاتی مشترک حاصل از توابع کاپولا منتخب به دست آمد. با اعمال زوج مرتب‌های تصادفی تولید شده در رابطه ۴ و حل دستگاه معادلات حاصل، در نهایت توزیع‌های احتمالاتی وابسته به زمان مربوط به فشار آب منفذی شامل تابع توزیع چگالی احتمال (PDF) و توزیع احتمال تجمعی (CDF) محاسبه گردیدند.

معیارهای ارزیابی و رتبه‌بندی توابع کاپولا

در این تحقیق، توزیع‌های احتمالاتی مشترک حاصل از توابع کاپولا با استفاده از شاخص‌هایی همچون معیار اطلاعاتی آکائیکه^۳ (AIC)، معیار

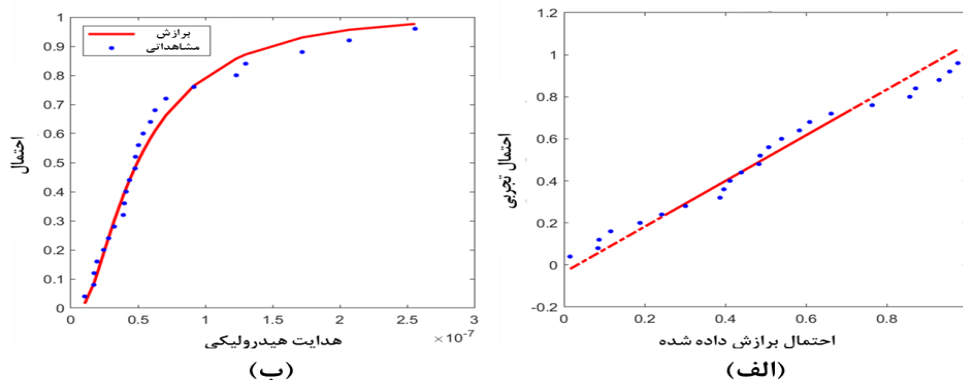
4 Bayesian Information Criterion (BIC)
5 Root Mean Square Error (RMSE)
6 Nash Sutcliffe Efficiency (NSE)

1 Implicit Central Difference Method
2 Skempton's parameter
3 Akaike Information Criterion (AIC)

نتایج و بحث

پس از اجرای برنامه رایانه ای طبق فلوجارت ارائه شده در شکل ۲، نتایج برازش توزیع های منفرد بر متغیرهای تصادفی و همچنین توزیع مشترک این متغیرها (با کاربرد توابع کاپولا مختلف) بررسی گردید. سپس تحت سناریوهای مختلف (کاربرد توابع کاپولا مختلف در دو عمق ۲ و ۴ متر خاک)، تغییرات زمانی توزیع احتمال فشار آب منفذی در حین فرآیند تحکیم محاسبه شد. در خصوص بررسی صحت نتایج به دست آمده، همبستگی داده های تولید شده توسط برنامه رایانه ای (در مرحله تولید زوج مرتبها) با مقادیر همبستگی داده های ورودی کنترل گردید. سپس همان طور که در انتهای بخش مواد و روش ها اشاره شد، عملکرد توابع کاپولا توسط شاخص های مختلف مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفت. شکل های ۳ و ۴ به ترتیب توزیع های منفرد هدایت هیدرولیکی و قابلیت فشردگی حجمی خاک را نشان می دهند.

که در این روابط، k تعداد پارامترهای مدل، \bar{L} مقدار حداکثر تابع درست نمایی، n تعداد مشاهدات، x_i مقدار واقعی، x مقدار پیش بینی شده و \bar{x}_i میانگین مقادیر واقعی می باشند. بر اساس نتایج معیارهای ارزیابی، توابع کاپولای منتخب بکار رفته در تحقیق حاضر عبارتند از توابع کلیتون، گامبل، فرانک، گوسی و تی-استیودنت، که با کاربرد آنها تحلیل احتمالاتی (دو متغیره) تغییرات فشار آب منفذی در حین فرآیند تحکیم در دو عمق خاک ۲ و ۴ متر انجام شد که نتایج آن در ادامه بیان می گردد. همچنین در این تحقیق از نتایج آزمایش های دانه بندی، هدایت هیدرولیکی و تحکیم به دست آمده از اعماق مختلف استفاده شد (Malekpour et al., 2018; Malekpour et al., 2019). علاوه بر این در هر عمق دو نمونه برداشت شده و تحت بارگذاری ۴۰۰ کیلو پاسکال (بارگذاری طراحی در منطقه مورد مطالعه) قرار گرفت تا از صحت اعداد حاصل اطمینان گردد.



شکل ۳- منحنی های هدایت هیدرولیکی، الف) نمودار چندک-چندک ب) توزیع احتمال تجمعی منفرد

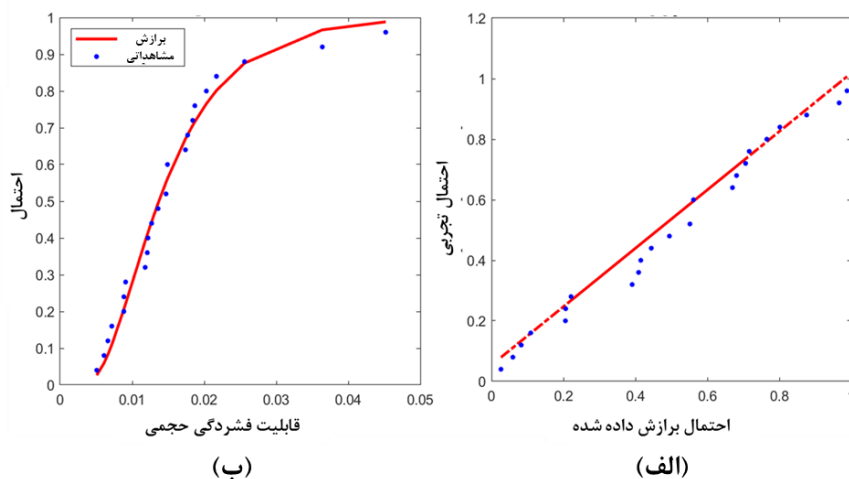
Figure 3- Hydraulic conductivity curves, a) Q-Q plot b) marginal distribution

مهم ترین آنها می توان به توزیع های بتا، گوسی معکوس، لوگ لجستیک، نرمال و لوگ نرمال و غیره

طبق نتایج به دست آمده، توزیع های احتمال تجمعی منفرد دو متغیر تصادفی مورد مطالعه در تحقیق از میان ۱۷ توزیع بررسی شده (که از

مقایسه توزیع داده‌های مشاهداتی با توزیع‌های احتمالاتی مختلف (Marden, 2004) استفاده گردید. بر این اساس شکل‌های ۳-الف و ۴-الف و با استفاده از شاخص BIC برازش مناسب توزیع گوسی معکوس بر هر دو متغیر تصادفی را تأیید می‌نمایند.

اشاره نمود) از توزیع گوسی معکوس^۱ تبعیت می‌کنند. همچنین جهت تعیین میزان برازش این توزیع بر هر یک از متغیرهای تصادفی، از نمودار چندک چندک^۲ به عنوان روش گرافیکی موثر در



شکل ۴- منحنی‌های قابلیت فشردگی حجمی، الف) نمودار چندک-چندک ب) توزیع احتمال تجمعی منفرد

Figure 4- Volumetric compressibility curves, a) Q-Q plot b) marginal distribution

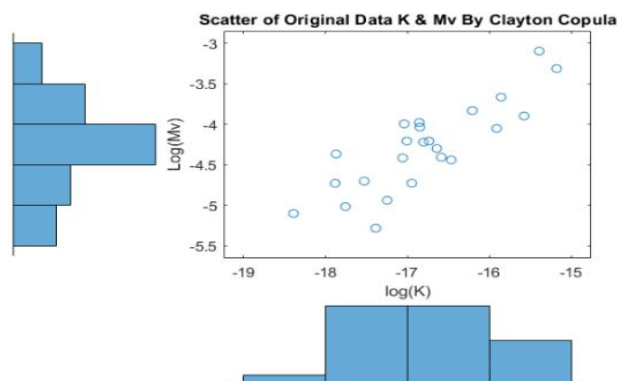
فشردگی حجمی خاک‌های ریزدانه منطقه مورد مطالعه به ترتیب $1/0.3 \times 10^{-8}$ تا $2/56 \times 10^{-7}$ متر بر ثانیه و $0/0.051$ تا $0/0.452$ مترمربع بر کیلونیوتن به دست آمد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش لگاریتم طبیعی هدایت هیدرولیکی، مقادیر مربوط به قابلیت فشردگی حجمی خاک نیز افزایش یافته و بیانگر همبستگی مثبت میان متغیرهای تصادفی می‌باشد. همچنین در شکل ۵ فشردگی بیشتر نقاط در مقادیر بزرگتر هدایت هیدرولیکی، نشان‌دهنده افزایش همبستگی دو متغیر تصادفی با افزایش مقادیر آنها می‌باشد.

سپس توزیع احتمال مشترک (دو متغیره) متغیرهای تصادفی بر اساس ضریب همبستگی حاصل از زوج مرتب‌های هدایت هیدرولیکی-قابلیت فشردگی حجمی به دست آمده از نمونه‌های خاک منطقه مورد مطالعه و با استفاده از ضریب همبستگی کندال^۳ تعیین گردید. شکل ۵ نمودار هیستوگرام-پراکنندگی زوج مرتب‌های هدایت هیدرولیکی-قابلیت فشردگی حجمی خاک را بر اساس ۲۴ نمونه حاصل از چاه‌های گمانه حفر شده در ناحیه مورد مطالعه را نشان می‌دهد که به عنوان ورودی اولیه به برنامه رایانه‌ای فراخوانی شدند. محدوده تغییرات هدایت هیدرولیکی و ضریب قابلیت

³ Kendall's correlation coefficient

1 Inverse Gaussian
2 Q-Q plot

تحلیل احتمالاتی دو متغیره تغییرات زمانی فشار آب منفذی در حین فرآیند تحکیم پی سازه

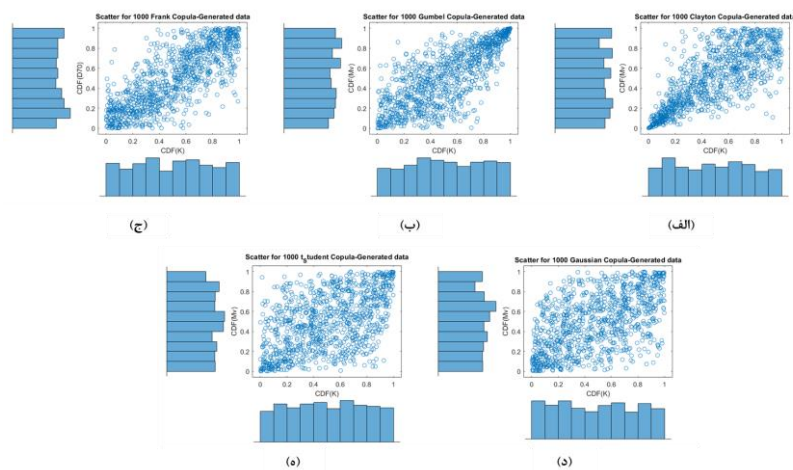


شکل ۵- نمودار هیستوگرام-پراکندگی قابلیت فشردگی حجمی در مقابل هدایت هیدرولیکی حاصل از نمونه‌های خاک

Figure 5- Histogram-scatter of volume compressibility against hydraulic conductivity derived from soil samples

از توابع کاپولا بر اساس همبستگی داده‌های موجود می‌باشد. در تحقیق حاضر پس از تعیین میزان همبستگی زوج مرتب‌های هدایت هیدرولیکی- قابلیت فشردگی حجمی از میان ۲۴ نمونه خاک برداشت شده، تعداد ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با استفاده از توابع کاپولا مختلف تعیین گردید (شکل ۶).

با توجه به هزینه بالای انجام آزمایش‌های صحرایی در پروژه‌های ژئوتکنیکی و محدودیت تعداد داده‌های اولیه مورد بررسی در بسیاری از پروژه‌ها، در تحقیق حاضر به عنوان یک نوآوری از توابع کاپولا برای حل این معضل استفاده گردید. بر این اساس، یکی از ویژگی‌های برنامه رایانه‌ای توسعه داده شده امکان استخراج تعداد نمونه تصادفی دلخواه از هر یک



شکل ۶- نمودار هیستوگرام-پراکندگی ۱۰۰۰ زوج مرتب قابلیت فشردگی حجمی - هدایت هیدرولیکی تولید شده به ازای توابع کاپولا مختلف: الف) کلیتون ب) گامبل ج) فرانک د) گوسی ه) تی-استیودنت

Figure 6-The histogram-scatter diagram of 1000 conductivity generated by different copula functions: a) Clayton b) Gumbel c) Frank d) Gaussian e) t-Student

به فشردگی نقاط مربوط به تابع کلیتون (شکل ۶- الف) و بیشترین همبستگی در مقادیر زیاد هدایت

طبق نتایج ارائه شده در شکل ۶، بیشترین همبستگی در مقادیر کم هدایت هیدرولیکی با توجه

حجمی را به صورت رتبه‌بندی این توابع ارائه می‌نماید. بر اساس جدول ۲، در تحقیق حاضر طبق دو معیار اصلی ارزیابی مدل (معیار اطلاعاتی AIC و معیار ارزیابی BIC)، مقدار عددی AIC و BIC تابع گوسی، کمتر از سایر توابع کاپولا می‌باشد. بنابراین این تابع بهترین مدل برای تعیین توزیع احتمالاتی مشترک زوج مرتب‌های هدایت هیدرولیکی-قابلیت فشردگی حجمی می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود، پس از تابع گوسی به ترتیب توابع کاپولا تی-استیودنت، گامبل، فرانک و کلیتون در رتبه‌های بعدی بهترین توزیع‌های مشترک برای زوج مرتب مذکور قرار دارند. نکته جالب توجه این است که توابع بیضوی با وجود اینکه در مقادیر حدی (مقادیر کم و زیاد هدایت هیدرولیکی) همبستگی کمتری از توابع ارشمیدسی نشان می‌دهند، اما به صورت کلی مدل‌های بهتری برای تشکیل توزیع‌های دو متغیره زوج مرتب‌های تصادفی مورد بررسی در تحقیق حاضر می‌باشند.

هیدرولیکی مربوط به تابع گامبل (شکل ۶-ب) می‌باشد. تابع فرانک (شکل ۶-ج) نیز همبستگی مناسبی را در مقادیر حدی (بیش‌ترین و کم‌ترین مقادیر هدایت هیدرولیکی و قابلیت فشردگی حجمی) ایجاد می‌نماید. توابع کاپولا بیضوی (شکل‌های ۶-د و ۶-ه) به طور کلی از نظر ضریب همبستگی عملکردی تقریباً مشابه و با همبستگی کمتر نسبت به توابع ارشمیدسی (شکل‌های ۶-الف-ج) برای دو متغیره ضریب هدایت هیدرولیکی و میان توابع بیضوی، همبستگی به ازای مقادیر کم و زیاد هدایت هیدرولیکی در تابع گوسی (شکل ۶-د) نسبت به تابع تی-استیودنت (شکل ۶-ه) بیش‌تر است.

جدول ۲ نتایج اعمال توابع کاپولا مختلف به زوج مرتب‌های هدایت هیدرولیکی-قابلیت فشردگی

جدول ۲- رتبه‌بندی توابع کاپولا برای زوج مرتب‌های هدایت هیدرولیکی-قابلیت فشردگی حجمی

Table 2- Ranking of copula functions for pair values of hydraulic conductivity-volume compressibility

رتبه	معیار اطلاعاتی AIC	معیار ارزیابی BIC
۱	گوسی	گوسی
۲	تی-استیودنت	تی-استیودنت
۳	گامبل	گامبل
۴	فرانک	فرانک
۵	کلیتون	کلیتون

همانگونه که مشاهده می‌شود تابع گوسی با RMSE برابر با ۰/۱۱۷۹ بهترین عملکرد را ایجاد می‌نماید.

از سوی دیگر، جدول ۳ مقادیر RMSE و NSE را به ازای توابع کاپولا مختلف نشان می‌دهد.

گامبل، فرانک و کلیتون بر اساس معیار NSE مشابه نتایج RMSE به ترتیب با مقادیر ۰/۹۹۲۱، ۰/۹۹۱۹، ۰/۹۸۸۷ و ۰/۹۸۴۰ در رتبه های بعدی قرار دارند.

این شاخص برای برای توابع تی-استیودنت، گامبل، فرانک و کلیتون به ترتیب برابر با ۰/۱۱۹۷، ۰/۱۲۱۰، ۰/۱۴۲۹ و ۰/۱۷۰۲ به دست می آید. بر اساس معیار NSE نیز تابع گوسی با مقدار نزدیک به ۱ (برابر با ۰/۹۹۲۳) نسبت به سایر توابع مناسب ترین توزیع مشترک می باشد. توابع تی-استیودنت،

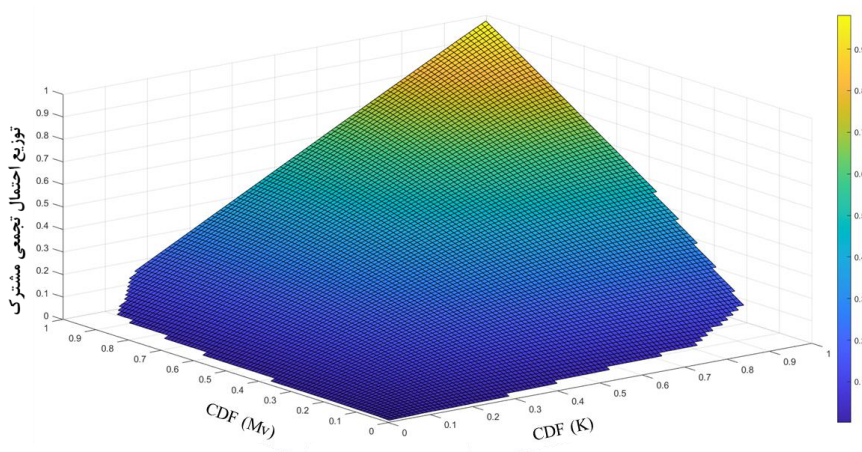
جدول ۳- مقادیر RMSE و NSE به ازای توابع کاپولا بکار رفته

Table 3- RMSE and NSE values for adopted copula functions

نام کاپولا	RMSE	NSE
کلیتون	۰/۱۷۰۲	۰/۹۸۴۰
گامبل	۰/۱۲۱۰	۰/۹۹۱۹
فرانک	۰/۱۴۲۹	۰/۹۸۸۷
گوسی	۰/۱۱۷۹	۰/۹۹۲۳
تی-استیودنت	۰/۱۱۹۷	۰/۹۹۲۱

بیشترین میزان احتمال تجمعی مشترک دو متغیر تصادفی مورد مطالعه برابر با ۰/۹۷۰۴ به دست می آید.

شکل ۷ توزیع احتمالاتی مشترک حاصل از تابع گوسی را به عنوان بهترین تابع کاپولا برآزش شده به زوج مرتب های هدایت هیدرولیکی - قابلیت فشردگی حجمی نشان می دهد. بر اساس نتایج شکل ۷،

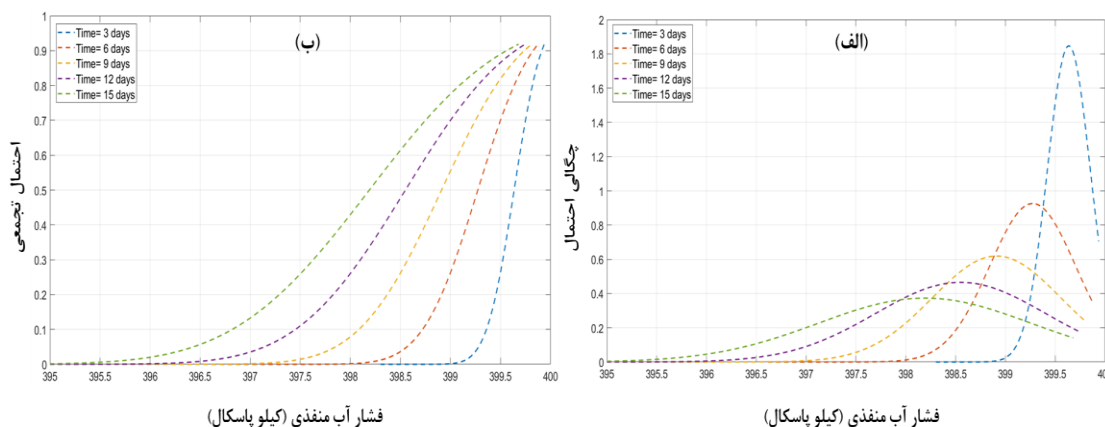


شکل ۷- توزیع احتمال تجمعی دو متغیره زوج مرتب های تصادفی حاصل از تابع گوسی

Figure 7- Cumulative bivariate probability distribution of random pair values by Gaussian copula

شکل های ۸ و ۹ منحنی های چگالی احتمال و توزیع احتمال تجمعی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با تابع کلیتون و به ترتیب در دو عمق ۲ و ۴ متر از سطح خاک را نشان می دهند. همانطور که مشاهده می شود، با گذشت زمان منحنی های چگالی احتمال (شکل های ۸-الف و ۹-الف) دارای قله های کوتاه تر با پهنای بیش تر بوده، که این امر حاکی از افزایش عدم قطعیت در مقادیر فشار آب منفذی با گذشت زمان از آغاز فرآیند تحکیم می باشد.

شکل های ۸ تا ۱۷ نتایج تحلیل احتمالاتی تحکیم خاک تحت تاثیر زوج مرتب های تصادفی هدایت هیدرولیکی-قابلیت فشردگی حجمی خاک و در حالت غیرماندگار (با گذشت زمان طی ۱۵ روز) را نشان می دهد. همانطور که در بخش قبل اشاره گردید، تحلیل احتمالاتی با استفاده از روش مونت-کارلو و ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی به ازای لایه خاک در دو عمق ۲ و ۴ متر انجام شد.



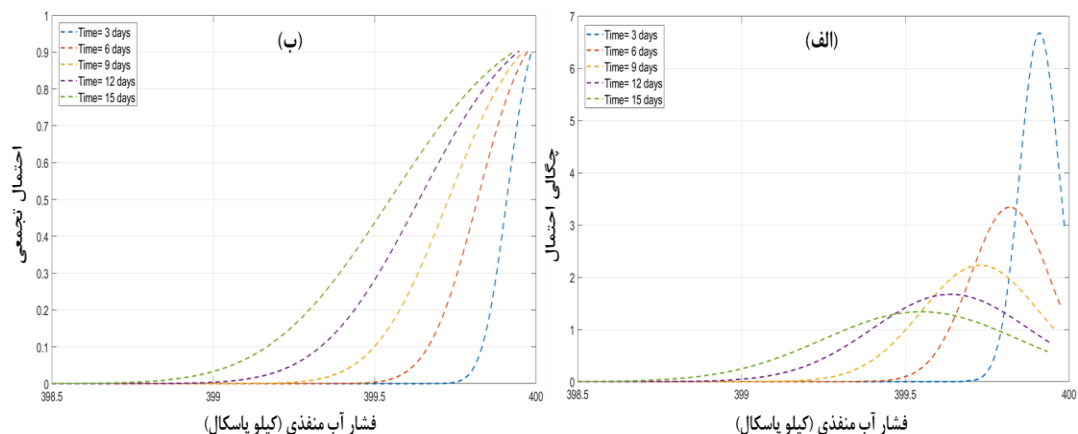
شکل ۸- توزیع احتمال فشار آب منفذی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با کاربرد تابع کلیتون در عمق $\Delta Z = 2 \text{ m}$

(الف) چگالی احتمال (PDF) (ب) توزیع احتمال تجمعی (CDF)

Figure 8- Probability distribution of pore water pressure per 1000 random pair values using the Clayton copula at the depth of $\Delta Z = 2 \text{ m}$ a) Probability density (PDF) b) Cumulative distribution (CDF)

آب منفذی در عمق های ۲ و ۴ متر از سطح خاک به ترتیب برابر است با ۳۹۸/۷۵ و ۳۹۹/۵۴ کیلو پاسکال می باشد.

مقایسه منحنی های توزیع احتمال تجمعی (شکل های ۸-ب و ۹-ب) نشان می دهد که در شرایط اعمال فشار اولیه ۴۰۰ کیلو پاسکال، با گذشت ۱۵ روز در سطح احتمال ۷۰ درصد، فشار



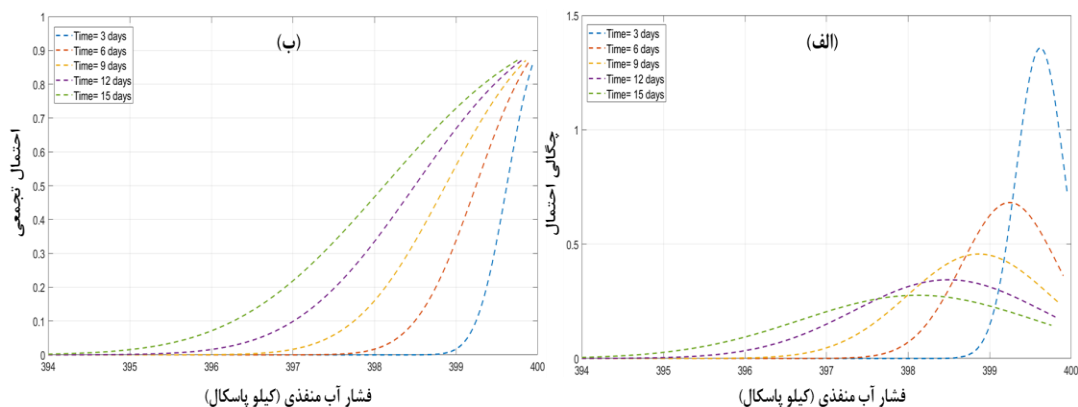
شکل ۹- توزیع احتمال فشار آب منفذی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با کاربرد تابع کلیتون در عمق $\Delta Z = 4 \text{ m}$

(الف) چگالی احتمال (PDF) (ب) توزیع احتمال تجمعی (CDF)

Figure 9- Probability distribution of pore water pressure per 1000 random pair values using Clayton function at the depth of $\Delta Z = 4 \text{ m}$ a) Probability density (PDF) b) Cumulative distribution (CDF)

در شکل های ۱۰ و ۱۱ به ازای کاربرد تابع گامبل منحنی های چگالی احتمال و توزیع احتمال تجمعی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب متغیرهای تصادفی و به ترتیب در اعماق ۲ و ۴ متر از سطح خاک نشان داده شده است. در این حالت نیز منحنی ها با گذشت زمان دارای قله های کوتاه تر و پهنای بیش تر می باشند، که مشابه کاربرد تابع کلیتون (شکل های ۸ و ۹) حاکی از افزایش عدم قطعیت در نتایج مشاهده می گردد.

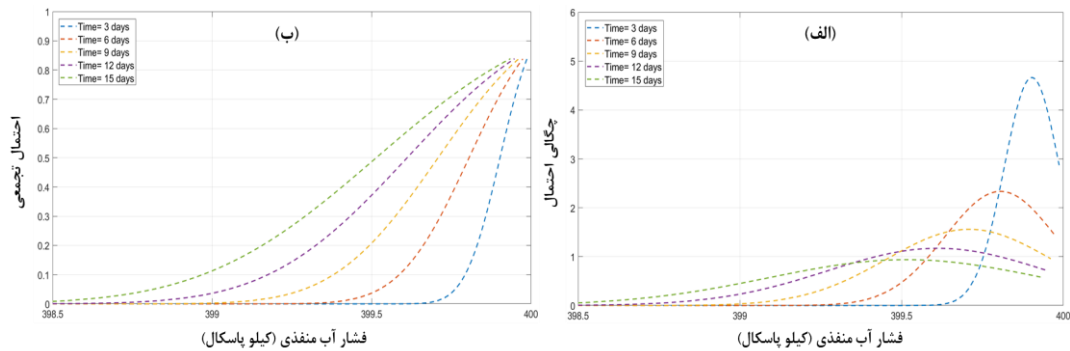
قطعیت در مقادیر فشار آب منفذی با گذشت زمان است. از سوی دیگر، مقایسه شکل های ۸ و ۱۰ (عمق ۲ متر) با شکل های ۹ و ۱۱ (عمق ۴ متر) نشان می دهد که در عمق ۲ متر منحنی ها با گذشت زمان دارای قله کوتاه تر (چگالی احتمال کمتر) می باشند. این موضوع بیانگر این است که با گذشت زمان در نواحی نزدیک به سطح خاک افزایش عدم قطعیت در نتایج مشاهده می گردد.



شکل ۱۰- توزیع احتمال فشار آب منفذی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با کاربرد تابع گامبل در عمق $\Delta Z = 2 \text{ m}$

(الف) چگالی احتمال (PDF) (ب) توزیع احتمال تجمعی (CDF)

Figure 10- Probability distribution of pore water pressure per 1000 random pair values using Gumbel function at the depth of $\Delta Z = 2 \text{ m}$ a) Probability density (PDF) b) Cumulative distribution (CDF)

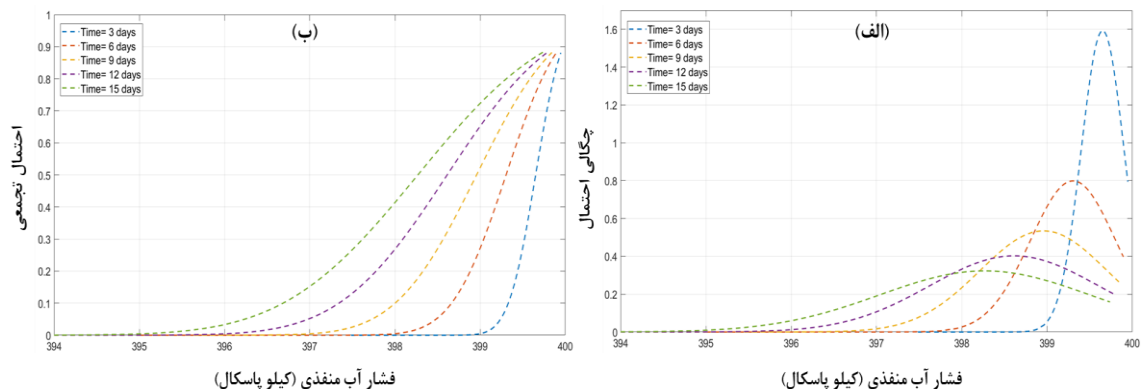


شکل ۱۱- توزیع احتمال فشار آب منفذی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با کاربرد تابع گامبل در عمق $\Delta Z = 4 \text{ m}$
 الف) چگالی احتمال (PDF) ب) توزیع احتمال تجمعی (CDF)

Figure 11- Probability distribution of pore water pressure per 1000 random pair values using Gumbel function at the depth of $\Delta Z = 4 \text{ m}$ a) Probability density (PDF) b) Cumulative distribution (CDF)

شکل های ۱۲ و ۱۳ منحنی های چگالی احتمال و توزیع احتمال تجمعی مربوط به تابع فرانک و به ترتیب در اعماق ۲ و ۴ متر از سطح خاک را نشان می دهند. در اینجا نیز روند افزایش عدم قطعیت فشار آب منفذی با زمان مشابه شکل های ۸ تا ۱۱ مشاهده می گردد. مقایسه منحنی های توزیع احتمال تجمعی (شکل های ۱۲-ب و ۱۳-ب) نشان می دهد که با گذشت ۱۵ روز در سطح احتمال ۷۰ درصد، فشار آب منفذی در اعماق ۲ و ۴ متر از سطح خاک به ترتیب برابر است با ۳۹۸/۹۵ و ۳۹۹/۵۴ کیلو پاسکال می باشد.

مقایسه منحنی های توزیع احتمال تجمعی (شکل های ۱۰-ب و ۱۱-ب) نشان می دهد که با گذشت ۱۵ روز در سطح احتمال ۷۰ درصد، فشار آب منفذی در عمق های ۲ و ۴ متر از سطح خاک به ترتیب برابر با ۳۹۸/۹ و ۳۹۹/۵۵ کیلو پاسکال می باشد. از این رو تابع گامبل (شکل های ۱۰ و ۱۱) با گذشت زمان از آغاز تحکیم در مقایسه با تابع کلیتون (شکل های ۸ و ۹) مقدار فشار آب منفذی را اندکی بزرگتر برآورد می نماید.



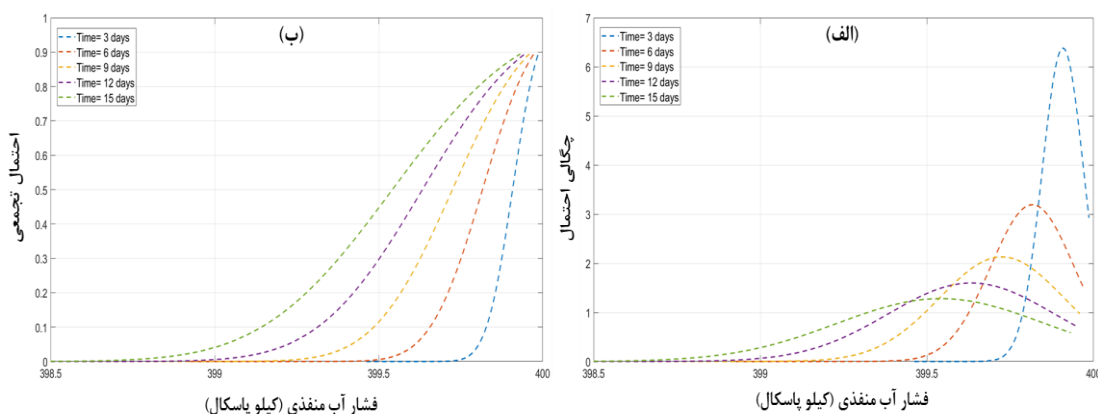
شکل ۱۲- توزیع احتمال فشار آب منفذی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با کاربرد تابع فرانک در عمق $\Delta Z = 2 \text{ m}$
 الف) چگالی احتمال (PDF) ب) توزیع احتمال تجمعی (CDF)

Figure 12- Probability distribution of pore water pressure per 1000 random pair values using Frank function at the depth of $\Delta Z = 2 \text{ m}$ a) Probability density (PDF) b) Cumulative distribution (CDF)

تحلیل احتمالاتی دو متغیره تغییرات زمانی فشار آب منفذی در حین فرآیند تحکیم پی سازه

دو تابع دیگر سریع تر بوقوع می پیوندند. از مقایسه این نتیجه با رتبه بندی توابع کاپولا در جدول های ۲ و ۳ نتیجه می شود که هر چه رتبه کاپولا بهتر باشد، حساسیت و سرعت تابع کاپولا در نمایش عدم قطعیت موجود در نتایج بیشتر می گردد.

نکته حائز اهمیت در مقایسه عملکرد توابع ارشمیدسی (کلیتون، گامبل و فرانک) این است که وقوع عدم قطعیت مقادیر فشار آب منفذی (مشاهده منحنی های دارای قله های کوتاه تر) در حین تحکیم با زمان در عمق ۲ متر به ازای تابع گامبل نسبت به



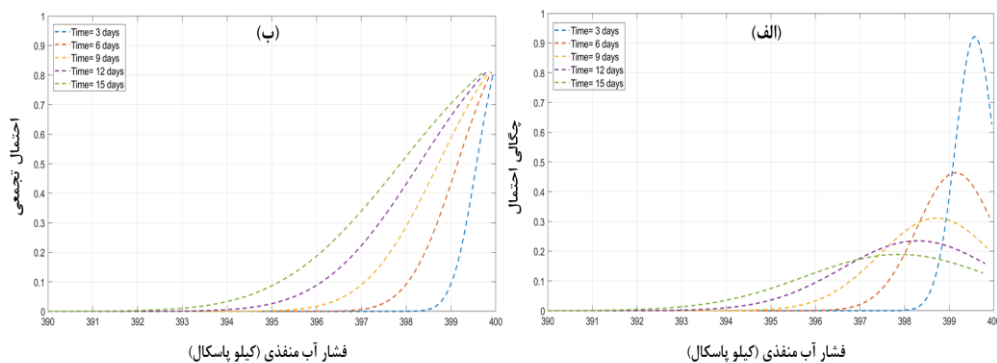
شکل ۱۳- توزیع احتمال فشار آب منفذی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با کاربرد تابع فرانک در عمق $\Delta Z = 4 \text{ m}$

الف) چگالی احتمال (PDF) ب) توزیع احتمال تجمعی (CDF)

Figure 13- Probability distribution of pore water pressure per 1000 random pair values using Frank function at the depth of $\Delta Z = 4 \text{ m}$ a) Probability density (PDF) b) Cumulative distribution (CDF)

احتمال (شکل های ۱۴-الف و ۱۵-الف) نسبت به توابع کاپولا ارشمیدسی (کلیتون، گامبل و فرانک) دارای قله های کوتاه تر با پهنای بیش تر می شوند، که حاکی از افزایش عدم قطعیت بیشتر در مقادیر فشار آب منفذی با گذشت زمان است.

شکل های ۱۴ و ۱۵ منحنی های چگالی احتمال و توزیع احتمال تجمعی را به ازای ۱۰۰۰ نمونه تصادفی با کاربرد تابع گوسی و به ترتیب در دو عمق ۲ و ۴ متر از سطح خاک نشان می دهند. نتایج نشان می دهد که با گذشت زمان منحنی های چگالی



شکل ۱۴- توزیع احتمال فشار آب منفذی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با کاربرد تابع گوسی در عمق $\Delta Z = 2 \text{ m}$

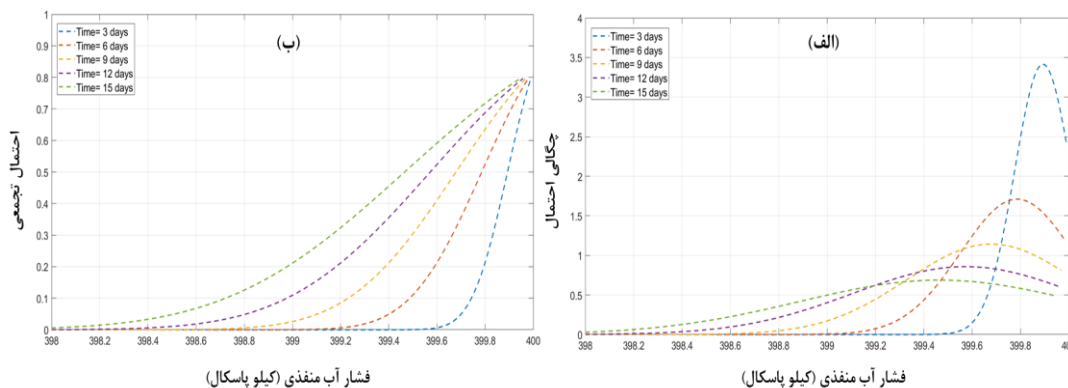
الف) چگالی احتمال (PDF) ب) توزیع احتمال تجمعی (CDF)

Figure 14- Probability distribution of pore water pressure per 1000 random pair values using Gaussian function at the depth of $\Delta Z = 2 \text{ m}$ a) Probability density (PDF) b) Cumulative distribution (CDF)

تحلیل احتمالاتی دو متغیره تغییرات زمانی فشار آب منفذی در حین فرآیند تحکیم پی سازه

ترتیب برابر است با ۳۹۹ و ۳۹۹/۸ کیلوپاسکال می- باشد. طبق نتایج، سرعت زهکشی و اتلاف فشار آب منفذی در حین فرآیند تحکیم با تابع گوسی در مقایسه با توابع کاپولا ارشمیدسی کمتر می باشد.

مقایسه منحنی های توزیع احتمال تجمعی (شکل های ۱۴-ب و ۱۵-ب) نشان می دهد که با گذشت ۱۵ روز با سطح احتمال ۷۰ درصد، فشار آب منفذی در عمق های ۲ و ۴ متر از سطح خاک به

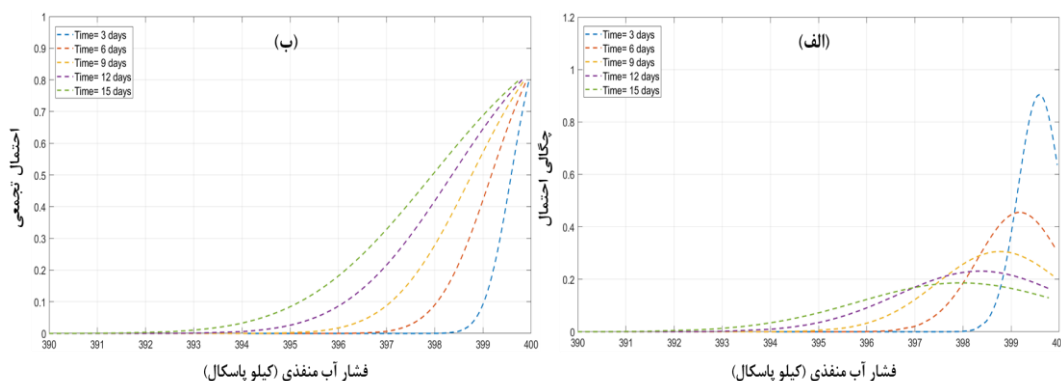


شکل ۱۵- توزیع احتمال فشار آب منفذی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با کاربرد تابع گوسی در عمق $\Delta Z = 4 \text{ m}$ (الف) چگالی احتمال (PDF) (ب) توزیع احتمال تجمعی (CDF)

Figure 15- Probability distribution of pore water pressure per 1000 random pair values using Gaussian function at the depth of $\Delta Z = 4 \text{ m}$ a) Probability density (PDF) b) Cumulative distribution (CDF)

می دهد که در عمق ۲ متر چگالی احتمال حاصل از تابع تی- استیودنت (شکل ۱۶-الف) تقریباً برابر با تابع گوسی (شکل ۱۴-الف) می باشد. این روند در عمق ۴ متر در شکل های ۱۵-الف و ۱۷-الف نیز مشاهده می شود.

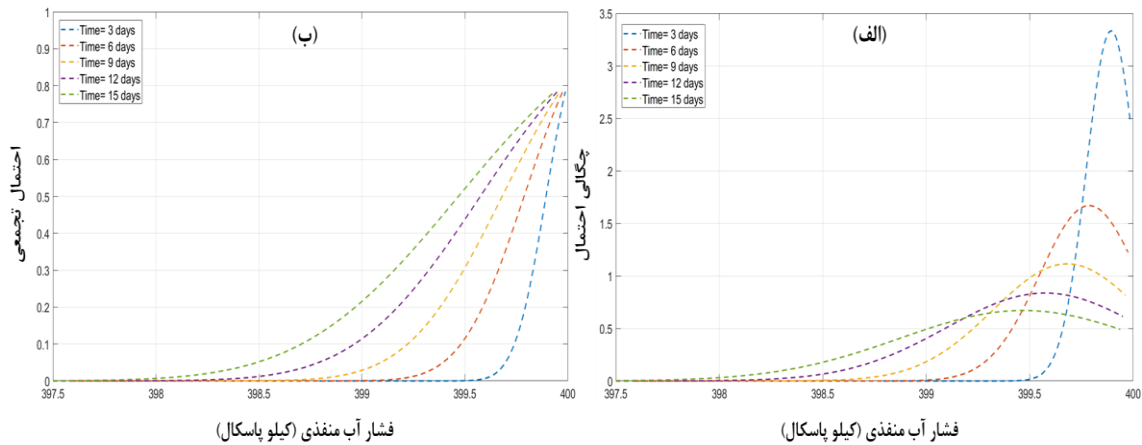
شکل های ۱۶ و ۱۷ منحنی های چگالی احتمال و توزیع احتمال تجمعی با کاربرد تابع تی- استیودنت و به ترتیب در عمق ۲ و ۴ متر از سطح خاک را نشان می دهند. مقایسه منحنی های چگالی احتمال توابع کاپولا بیضوی (گوسی و تی- استیودنت) نشان



شکل ۱۶- توزیع احتمال فشار آب منفذی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با کاربرد تابع تی- استیودنت در عمق $\Delta Z = 2 \text{ m}$ (الف) چگالی احتمال (PDF) (ب) توزیع احتمال تجمعی (CDF)

Figure 16- Probability density distribution of pore water pressure per 1000 random pair values using t-student function at the depth of $\Delta Z = 2 \text{ m}$ a) Probability density (PDF) b) Cumulative distribution (CDF)

تحلیل احتمالاتی دو متغیره تغییرات زمانی فشار آب منفذی در حین فرآیند تحکیم پی سازه



شکل ۱۷- توزیع احتمال فشار آب منفذی به ازای ۱۰۰۰ زوج مرتب تصادفی با کاربرد تابع تی-استیودنت در عمق $\Delta Z = 4 \text{ m}$

(الف) چگالی احتمال (PDF) (ب) توزیع احتمال تجمعی (CDF)

Figure 17- Probability distribution of pore water pressure per 1000 random pair values using t-student function at the depth of $\Delta Z = 4 \text{ m}$ a) Probability density (PDF) b) Cumulative distribution (CDF)

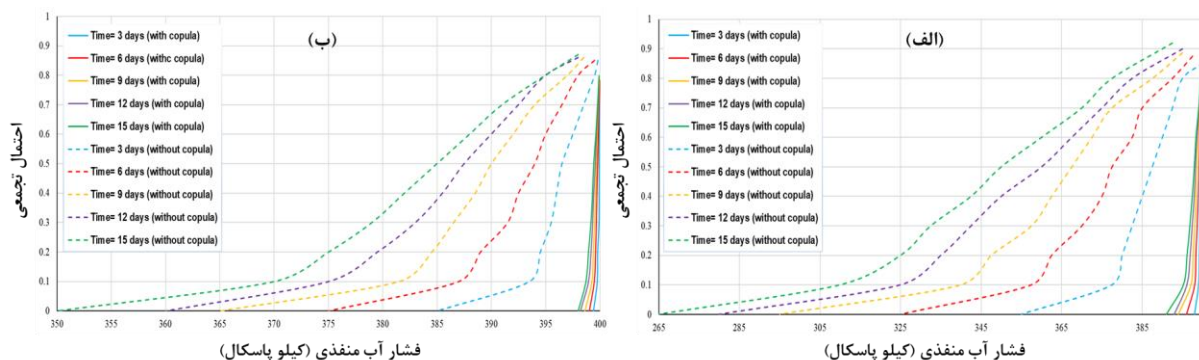
ارشمیدسی در مقایسه با توابع بیضوی، بیانگر نتایج غیرمحافظة کارانه می‌باشد.

شکل ۱۸ تغییرات زمانی منحنی‌های احتمال تجمعی با اعمال تابع گوسی به عنوان بهترین تابع کاپولا در تحقیق حاضر (منحنی‌های پیوسته) را در مقایسه با نتایج تحقیق پیشین (Malekpour *et al.*, 2018) در شرایط عدم اعمال تابع کاپولا (منحنی‌های خط چین) نشان می‌دهد.

مقایسه منحنی‌های توزیع احتمال تجمعی (شکل‌های ۱۶-ب و ۱۷-ب) نشان می‌دهد که با گذشت ۱۵ روز با سطح احتمال ۷۰ درصد، فشار آب منفذی در عمق‌های ۲ و ۴ متر از سطح خاک به ترتیب برابر است با ۳۹۹/۰۵ و ۳۹۹/۷۵ کیلوپاسکال می‌باشد. همچنین در مقایسه نتایج تابع گوسی (شکل‌های ۱۴ و ۱۵) و تابع تی-استیودنت (شکل‌های ۱۶ و ۱۷) مشخص است که با گذشت زمان اتلاف فشار آب منفذی حین تحکیم توسط روش تی-استیودنت اندکی سریع‌تر از تابع گوسی می‌باشد.

به طور کلی از مقایسه شکل‌های ۸ تا ۱۷ نتیجه می‌شود که توابع کاپولا بیضوی در مقایسه با توابع کاپولا ارشمیدسی سرعت فرآیند تحکیم را کمتر برآورد می‌نمایند. از سوی دیگر، رتبه‌بندی توابع کاپولا در تحقیق حاضر نشان داد که توابع بیضوی نسبت به توابع ارشمیدسی عملکرد بهتری دارند. بنابراین سرعت تحکیم بیشتر حاصل از توابع

تحلیل احتمالاتی دو متغیره تغییرات زمانی فشار آب منفذی در حین فرآیند تحکیم پی سازه



شکل ۱۸- تغییرات زمانی توزیع تجمعی فشار آب منفذی در حین تحکیم با اعمال تابع کاپولا و مقایسه با Malekpour *et al.* (2018) در شرایط عدم اعمال کاپولا (الف) عمق ۲ متر (ب) عمق ۴ متر

Figure 18- Temporal variations of cumulative distribution of pore water pressure during consolidation using copula functions compared to Malekpour *et al.* (2018) in no copula condition a) depth = 2m b) depth = 4m

فشرده‌گی حجمی خاک مطالعه شد. همچنین تاثیر این همبستگی بر تغییرات زمانی تحلیل احتمالاتی دو متغیره پدیده تحکیم خاک از طریق توسعه یک برنامه رایانه‌ای در محیط برنامه‌نویسی MATLAB و با انجام یک مطالعه موردی بررسی گردید. به طور کلی با استفاده از نتایج حاصل موارد زیر قابل نتیجه‌گیری می‌باشند.

- در صورت عدم اعمال همبستگی متغیرهای موثر، مقادیر سرعت نشست تحکیمی خاک بزرگتر برآورد گردیده و مهندسان طراح پی ناگزیر به طراحی پی‌های بزرگتر با هزینه بیشتر از ضرورت می‌باشند.

- برای اعمال همبستگی متغیرهای موثر بر تحلیل احتمالاتی تحکیم خاک، استفاده از توابع کاپولا بیضوی اولویت بیشتری نسبت به توابع ارشمیدسی دارند.

- بر اساس سناریوهای مختلف مورد بررسی، تابع کاپولا گوسی به عنوان بهترین تابع کاپولا در تحلیل احتمالاتی پدیده تحکیم قابل توصیه می‌باشد.

همانطور که مشاهده می‌شود در عمق ۲ متر (شکل ۱۸-الف) و همچنین در عمق ۴ متر (شکل ۱۸-ب) تحت شرایط عدم اعمال تابع کاپولا نرخ کاهش فشار آب منفذی ناشی از تحکیم در بازه زمانی مورد بررسی سریع‌تر برآورد می‌شود. در این راستا در سطح احتمال ۷۰ درصد، در عمق‌های ۲ متر و ۴ متر اختلاف نتایج تحقیق حاضر و تحقیق ملک‌پور و همکاران (Malekpour *et al.*, 2018) به ترتیب ۷ درصد و ۲/۲ درصد می‌باشد. این موضوع نشان می‌دهد که عدم اعمال همبستگی متغیرهای تصادفی در نواحی نزدیک به سطح خاک خطای بزرگتری در برآورد میزان تحکیم خاک ایجاد می‌نماید.

نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر عملکرد توابع کاپولا ارشمیدسی (کلیتون، گامبل و فرانک) و توابع کاپولا بیضوی (گوسی و تی-استیودنت) در اعمال همبستگی میان متغیرهای تصادفی هدایت هیدرولیکی و قابلیت

در انتها، لازم به ذکر است که نتایج تحقیق حاضر در برآورد احتمال وقوع نشست‌های تحکیمی بیش از حد مجاز در پی سازه‌ها به ازای بارهای وارده در طول عمر یک پروژه قابل استفاده و کاربرد توسط مهندسان پی می‌باشد. پیشنهاد می‌شود که در ادامه تحقیقات، عملکرد روش احتمالاتی ارائه شده در پی سازه‌ها با اعمال تاثیر لایه‌بندی خاک و تغییرات سطح آب زیرزمینی مورد بررسی قرار گیرد.

- در بررسی متغیرهای تصادفی موثر بر تحکیم به صورت منفرد (در سناریوهای مطالعه شده)، تابع گوسی معکوس بهترین نتایج را ارائه می‌نماید.
- در صورتیکه پی سازه در عمق کم قرار گیرد خطای عدم اعمال همبستگی متغیرهای تصادفی بیشتر است.

قدردانی

نویسندگان بر خود لازم می‌دانند که مراتب تشکر و قدردانی خود را به کارشناسان آزمایشگاه فنی و مکانیک خاک استان گیلان به جهت تقبل زحمت و انجام آزمایش بر روی نمونه‌های مورد استفاده در این تحقیق ابراز نمایند.

مراجع

- Aguilar-López, J., J. Warmink, R. Schielen and S. Hulscher. (2014). Flood defence design parameters correlation influence on failure probability—case study of backward erosion piping. *3rd IAHR Europe Congress: Water-Engineering and Research*, April, 2014, Porto, Portugal. pp. 1-12.
- Alibeikloo, M., Khabbaz, H., Fatahi, B., & Le, T. M. (2021). Reliability assessment for time-dependent behaviour of soft soils considering cross correlation between visco-plastic model parameters. *Reliability Engineering & System Safety*, 213, 107680.
- Bahrami, R., Khayat, N., & Nazarpour, A. (2021). Laboratory investigation on physical-mechanical characteristics and microstructure of a clayey gypsiferous soil in the presence of chemical accelerator. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 25(9), 3273-3288.
- Benemaran, R. S., & Esmaili-Falak, M. (2023). Predicting the Young's modulus of frozen sand using machine learning approaches: State-of-the-art review. *Geomechanics and Engineering*, 34(5), 507-527.
- Charoosaei, S., Khayat, N., & Adeli, M. M. (2019). Evaluation of Mathematical Relationships of Shear Wave Velocity and Standard Penetration Test Results with Bayesian Statistics Approach, *Bulletin of Earthquake Science and Engineering*, 6(4), 37-51.
- Cheng, Y., Zhang, L. L., Li, J. H., Zhang, L. M., Wang, J. H., & Wang, D. Y. (2017). Consolidation in spatially random unsaturated soils based on coupled flow-deformation simulation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 41(5), 682-706.
- Griffiths, D. V., & Fenton, G. A. (2009). Probabilistic settlement analysis by stochastic and random finite-element methods. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 135(11), 1629-1637.
- Khalaf-Shoushtari, M., Khayat, N., & Nazarpour, A. (2017). Investigating Parameters Affecting the Settlement of Gypsum Soils. *Irrigation and Drainage Structures Engineering Research*, 17(67), 81-94.

- Kilgore, R. T., & Thompson, D. B. (2011). Estimating joint flow probabilities at stream confluences by using copulas. *Transportation research record*, 2262(1), 200-206.
- Malekpour, A., Farookhroo, S., & Hosseini, M. (2019). Effect of Uncertainty of Soil Compressibility on Temporal Variations of Pore-Water Pressure at the Foundation of Structure. *Water and Soil Science (Agricultural Science)*, 29(2), 199-212. (in Persian)
- Malekpour, A., Sadeghian, N., & Mohammadi, M. (2018). Effect of uncertainty of hydraulic conductivity and number of samples in Monte-Carlo method on time-dependent variation of soil consolidation, *Iranian Journal of Soil and Water Research*, 49(4), 739-749. (in Persian)
- Marden, J. I. (2004). Positions and QQ plots, *Statistical Science*, 19(4), 606-614.
- Nadim, F. (2015). Accounting for uncertainty and variability in geotechnical characterization of offshore sites. In *Geotechnical safety and risk V* (pp. 23-35). IOS Press.
- Nour, A., Slimani, A., & Berrah, M. K. (2007). Consolidation statistics investigation via thin layer method analysis. *Transport in porous media*, 67(1), 69-91.
- Sadegh, M., Ragno, E., & AghaKouchak, A. (2017). Multivariate Copula Analysis Toolbox (MvCAT): describing dependence and underlying uncertainty using a Bayesian framework. *Water Resources Research*, 53(6), 5166-5183.
- Sklar, M. 1959. Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8, 229-231.
- Torfi, S., Khayat, N., & Horpibulsuk, S. (2021). Sustainable stabilization of compacted clay using sodium alginate for subgrade application. *International Journal of Geosynthetics and Ground Engineering*, 7, 1-15.
- Wang, L., Tang, L., Wang, Z., Liu, H., & Zhang, W. (2020). Probabilistic characterization of the soil-water retention curve and hydraulic conductivity and its application to slope reliability analysis. *Computers and Geotechnics*, 121, 103460.
- Wang, Y., Zhao, X., & Wang, B. (2013). LS-SVM and Monte Carlo methods based reliability analysis for settlement of soft clayey foundation. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 5(4), 312-317.
- Yang, S. C., Liu, T. J., & Hong, H. P. (2017). Reliability of tower and tower-line systems under spatiotemporally varying wind or earthquake loads. *Journal of Structural Engineering*, 143(10), 04017137.
- Zhang, Y., Beer, M., & Quek, S. T. (2015). Long-term performance assessment and design of offshore structures. *Computers & Structures*, 154, 101-115.
- Zomorodian, S. M. A., Zerangsani, F. (2015). Investigation into the effect of the uncertainty of geotechnical parameters on the bearing capacity of strip footings. *Sharif Journal of Civil Engineering*, 31.2(1.1), 129-136. (in Persian)

Original Research

Bivariate probabilistic analysis of temporal variations of pore water pressure during consolidation process in structural foundation

Amir Malekpour^{*}, Nima Sadeghian, Mohammad Javad Farrokhi

*Assistant Prof., Department of Water Engineering, Faculty of Agricultural Sciences, University of Guilan

Email: malekpour@guilan.ac.ir

Received: 12 August 2023 Accepted: 24 October 2023

<https://doi.org/10.22092/IDSER.2023.363197.1551>

Extended Abstract

Introduction

The consolidation and the subsequent settlement can lead to the land subsidence, building destruction, pipeline ruptures in water supply networks, and damage to the asphalt pavement. In soil consolidation analyses and many other geotechnical problems, the uncertainty of geotechnical variables and their spatial variations is of significant importance. As a result, the uncertainty-based approaches are currently employed to consider these problems rather than deterministic analyses. In this regard, some researches have demonstrated the considerable influence of the random variables of hydraulic conductivity and volume compressibility on the soil consolidation phenomenon. However, the studies have rarely addressed the correlation between these random variables and its effect on the probabilistic consolidation analysis. The current research aims at investigating the impact of correlation between two random variables of hydraulic conductivity and volume compressibility using copula functions via the development of a computer program in MATLAB. The performance of different copula functions in the bivariate probabilistic analysis of consolidation and the temporal variations of pore water pressure distributions are studied in a case study in Guilan province of Iran.

Methodology

In this research, a computer program was developed in MATLAB to estimate the marginal distributions of two random variables of hydraulic conductivity and soil volume compressibility. Then the bivariate probability distributions of two random variables were obtained using two copula groups of Archimedean (Clayton, Gumbel and Frank) and elliptic (Gaussian and t-student). The bivariate distributions of random variables were applied to estimate the temporal pore water pressure distributions during consolidation in soil depths of 2 and 4 meters. The best joint probability distribution and the corresponding copula function was determined on MvCAT software based on the correlation of random variables and using certain criteria such as AIC, BIC, RMSE, and NSE. As a feature of developed

computer program in this research, 1000 pair values of hydraulic conductivity and volumetric compressibility were generated by copula functions (from the primary 24 field data) in order to create more accurate results. Then, after numerically solving the governing differential equation of consolidation using the implicit central finite difference method, the probability distributions of pore water pressure over time including the probability density functions (PDFs) and cumulative distribution functions (CDFs) were calculated using different copulas and compared with each other.

Results and Discussion

The results showed that the inverse Gaussian distribution properly fits to the marginal distributions of each single random variable, according to BIC criterion. In this research, Kendall's correlation coefficient showed a positive correlation between the random variables of hydraulic conductivity and soil volume compressibility. After 15 days from the beginning of consolidation with an initial loading of 400 kPa, the pore water pressures in the depth of 2 meters were estimated equal to 398.75, 398.9 and 398.95 kPa for Clayton, Gumbel and Clayton copulas, respectively. Whereas the pore pressure in the same depth were obtained equal to 399 and 399.05 kPa for Gaussian and t-student copulas, respectively. In the depth of 4 meters, Clayton, Gumbel and Clayton copulas, estimated the pore pressures equal to 399.54, 399.55, 399.54 kPa, respectively. It shows that Archimedean copulas create almost similar results in deeper regions within a soil layer. For elliptical copulas in the depth of 4 meters, the pore water pressures were calculated equal to 399.8 and 399.75 kPa for Gaussian and t-student copulas, respectively.

Conclusions

Considering the correlation of random variables, it is concluded that Archimedean copulas are more accurate in extreme values than elliptic copulas but elliptic copulas according to AIC, BIC and other evaluation criteria provide better balance between the number of parameters, the accuracy and the complexity of model. Generally, for both Archimedean and elliptic copulas, the temporal variations of pore water distributions show an increase in uncertainty with time via changing from sharp and narrow curves to flat and wide curves. Moreover, the consolidation rate (pore pressure dissipation rate) is slower for elliptic copulas than Archimedean copulas. Gaussian copula was found to be the best copula among all investigated copulas. The error of neglecting the correlation of random variables is bigger when a shallow foundation is to be designed by an engineer. Meanwhile, the consolidation rate is overestimated when the correlation of random variables is ignored.

Acknowledgement

The authors express their gratitude to the experts working in technical and soil mechanics laboratory of Guilan province for their collaborations and carrying out the experiments on the soil samples of this research.

Keywords: Copula functions, Fine-grained soil, Joint probability analysis, Monte-Carlo method