

## کاربرد هندسه فرکتال و مدل لوله‌های موئین در برآورد تابع هدایت

### هیدرولیکی خاک

سمیرا امیدی و بیژن قهرمان<sup>1</sup>

کاندیدای دکتری آبیاری و زهکشی؛ دانشگاه فردوسی مشهد؛ Omidi\_samira@yahoo.com

استاد گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد؛ bijangh@um.ac.ir

دریافت: 96/4/19 و پذیرش: 96/7/12

#### چکیده

در این تحقیق بر مبنای هندسه فرکتال و مدل لوله‌های موئین خاک، تابع هدایت هیدرولیکی خاک مدل‌سازی شد. مدل پیشنهادی تابعی از قطر منافذ، طول ظاهری مسیر جریان، بعد فرکتالی منفذ و بعد فرکتالی لوله‌های موئین معوج می‌باشد. در این تحقیق روابط مربوط به محاسبه بعد فرکتالی منفذ و بعد فرکتالی لوله موئین معوج برای جریان غیراشباع به عنوان تابعی از میزان رطوبت خاک ارائه شده است. از مزایای این مدل نداشتن ثابت تجربی است. برای محاسبه قطر منافذ خاک از مدل منحنی مشخصه رطوبتی ون گنوختن استفاده شد. به منظور ارزیابی مدل ارائه شده از اطلاعات مربوط به 40 نمونه خاک با 11 بافت مختلف در محدوده‌ی شن، لوم و رس از بانک خاک UNSODA استفاده شد. نتایج ارزیابی بین 1/3E-9 تا 6/2E-5، GMER بین 0/006 تا 3/13 و GSDER بین 0/998 تا 8/48 بیانگر انطباق خوب تابع هدایت هیدرولیکی خاک مدل شده براساس فرکتال با مقادیر گزارش شده هدایت هیدرولیکی خاک بود.

واژه‌های کلیدی: بانک خاک UNSODA، بعد فرکتالی لوله موئین معوج، بعد فرکتالی منفذ.

---

<sup>1</sup> نویسنده مسئول، آدرس: مشهد، دانشگاه فردوسی، گروه مهندسی آب

## مقدمه

واضح بدانند چه بعد فرکتالی برای کار مورد نظر آنها مناسب است.

## تابع هدایت هیدرولیکی خاک

تابع هدایت هیدرولیکی خاک یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های هیدرولیکی خاک در حالت غیراشباع است. این مشخصه هیدرولیکی خاک به روش‌های مستقیم و غیرمستقیم برآورد می‌شود. برای تعیین مستقیم منحنی هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک روش‌های زیادی وجود دارد که از میان آن‌ها می‌توان به روش خروجی یک یا چند گامی (فینسرل و فیشینکو، 1999)، روش حرکت آب به سمت بالا (هادسون و همکاران، 1996؛ سربونلو و همکاران، 2006؛ هیلل و انور، 2016) و روش تبخیر (استولت و همکاران، 1994؛ شینلر و همکاران، 2010؛ شینلر و همکاران، 2017) اشاره کرد. به تازگی نیز روش‌های ژئوفیزیکی مانند استفاده از اشعه ایکس (زو و همکاران، 2001؛ الیوت و همکاران، 2010؛ نوید و همکاران، 2016) و رادار نفوذ کننده در زمین (بینلی و همکاران، 2001؛ بینلی و همکاران، 2002؛ دابویل بویسلر و همکاران، 2011؛ گوتینگ و همکاران، 2017) برای تخمین ویژگی‌های هیدرولیکی خاک در نواحی غیراشباع و در مقیاس بزرگ‌تر پیشنهاد شده‌اند. در روش اندازه‌گیری غیرمستقیم، تابع هدایت هیدرولیکی خاک به صورت نظری تعیین می‌شود، پارامترهای رابطه تابع می‌توانند به وسیله آزمایش‌های ساده اندازه‌گیری شوند. مدل‌های متعددی برای تابع هدایت هیدرولیکی خاک پیشنهاد شده است. به طور کلی این مدل‌ها را می‌توان به سه دسته روابط تجربی، مدل‌های آماری و مدل‌های فرکتالی طبقه‌بندی نمود.

## فرکتال

در دهه‌های اخیر دانشمندان رشته‌های مختلف سعی در استفاده از هندسه فرکتال برای مدل نمودن پدیده‌های علت و معلولی دارند. هندسه فرکتال توسط مندلیبرات (مندلیبرات، 1975) معرفی شد که می‌تواند برای توصیف کمی شکل و نامنظمی پدیده‌های طبیعی با استفاده از تخمین بعد فرکتالی آن‌ها به کار رود (مندلیبرات، 1975). بنابراین هندسه فرکتال می‌تواند برای توصیف معماری خاک و کمک به توصیف و تخمین فرآیندهای فیزیکی، شیمیایی و بیولوژیکی که در خاک رخ می‌دهند به کار رود. امید می‌رود که مدل‌های فرکتالی، فرآیندهای خاک را با دقت بیشتری نسبت به روش‌های بر مبنای هندسه کلاسیک، مدل کنند (کرافورد و همکاران، 1999). به طور کلی بیش از یک نوع بعد فرکتالی برای توصیف پدیده‌های فرکتالی وجود دارد. لذا محققین باید به‌طور

## کاربرد فرکتال در تعیین تابع هدایت هیدرولیکی خاک

در خاک، مسیر جریان آب، یون‌ها و گاز، توزیع اندازه ذرات و منافذ، همگی دارای اعوجاج هستند بنابراین نظریه فرکتال‌ها می‌تواند انتخاب خوبی برای مدل‌سازی آن‌ها باشد. هدایت هیدرولیکی به اتصال ماتریس جامد و نیز ناهمگنی آن‌ها بستگی دارد (کرافورد، 1994). هر دو هدایت هیدرولیکی اشباع و غیراشباع خاک وابستگی قانون توانی را به طول مقیاس اندازه‌گیری شده در سرعت جریان کم، جایی که معادله دارسی معتبر است و جایی که ماتریس جامد خاک می‌تواند توسط فرکتال تخمین زده شود، نشان می‌دهند. تایلر و ویت‌کرفت (1990)، هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک را بر مبنای مدل فرکتالی منحنی مشخصه آب خاک و مدل‌های هدایت هیدرولیکی نسبی توسعه یافته توسط معلم (1976) و بوردین (1953) به دست آوردند. ریو و اسپزیتو (1991)، یک مدل توده فرکتالی برای خاک غیراشباع ارائه کردند. مدل مذکور هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک را برای خاک‌های شنی به خوبی تخمین می‌زند. شپارد (1993) تابعی برای محاسبه هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک با استفاده از تابع نگهداشت آب خاک و توصیف فرکتالی مسیر جریان آب با استفاده از منحنی کخ سه جزئی ارائه نمود. مدل مذکور تابع هدایت هیدرولیکی خاک را در تمام مقادیر رطوبت برای هر نوع بافت خاکی تخمین می‌زند.

کرافورد (1994)، تأثیر غیریکنواختی ماتریس جامد، فضای منفذ و همچنین شکل مرز منفذ را بر روی هدایت هیدرولیکی اشباع و غیراشباع خاک مطالعه نمود. وی با منظور کردن تأثیر اتصال منافذ بر نفوذپذیری خاک، یک مدل فرکتالی، با معرفی طیف بعد فرکتالی به مدل ریو - اسپزیتو (1991)، پیشنهاد نمود. در این مدل طیف بعد فرکتالی معمولاً به روش‌های عددی تعیین می‌شود. در حقیقت، کاربرد این مدل در عمل بسیار مشکل است زیرا ساختمان مدل بسیار پیچیده است و برخی پارامترهای آن به دشواری تعیین می‌شوند. فونتنس و همکاران (1996)، بر مبنای بعد فرکتالی به دست آمده از منحنی مشخصه آب خاک، رابطه‌ای برای هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک ارائه نمودند. یو و چنگ (2002)، همچنین یو و همکاران (2002)، یک مدل هندسه فرکتالی برای هدایت هیدرولیکی محیط متخلخل پیشنهاد نمودند و نشان دادند این مدل نه تنها برای محیط متخلخل ذره‌ای مناسب است (یو و چنگ، 2002) بلکه برای محصولات متخلخل نیز

که در آن  $\lambda$  قطر منافذ،  $\lambda_{max}$  حداکثر قطر منافذ،  $N$  تعداد تجمعی منافذی که اندازه آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی  $\lambda$  باشد،  $D_f$  بعد فرکتالی منافذ بوده که مقدار آن در دو بعد  $1 < D_f < 2$  و در سه بعد  $2 < D_f < 3$  است.

تعداد کل منافذ از کم‌ترین تا بیش‌ترین قطر با استفاده از رابطه (1) با جای‌گذاری  $\lambda_{min}$ ، حداقل قطر منافذ، به جای  $\lambda$  به دست می‌آید:

$$N_t(L \geq \lambda_{min}) = \left( \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \right)^{D_f} \quad (2)$$

حال با توجه به این که هنگام ورود آب به محیط متخلخل ابتدا منافذ کوچک آب‌دار می‌شوند باید تعداد منافذی که اندازه آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی  $\lambda$  است را به دست آورد:

$$N(L \leq \lambda) = N_t(L \geq \lambda_{min}) - N(L \geq \lambda) \quad (3)$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (3) خواهیم داشت:

$$dN = D_f \lambda_{max}^{D_f} \lambda^{-(D_f+1)} d\lambda \quad (4)$$

با تقسیم رابطه (4) بر رابطه (2)، رابطه (5) حاصل می‌شود:

$$\frac{dN}{N_t} = D_f \lambda_{min}^{D_f} \lambda^{-(D_f+1)} d\lambda = f(\lambda) d\lambda \quad (5)$$

که در آن  $f(\lambda) = D_f \lambda_{min}^{D_f} \lambda^{-(D_f+1)}$  است، با انتگرال‌گیری از رابطه (5) خواهیم داشت:

$$\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} f(\lambda) d\lambda = 1 - \left( \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \right)^{D_f} \quad (6)$$

به طور کلی در محیط متخلخل  $10^{-2} \leq \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$  لذا  $\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} f(\lambda) d\lambda = 1$ ، تابع چگالی احتمال است، بنابراین نظریه و روش هندسه فرکتال می‌تواند برای تحلیل خصوصیات محیط متخلخل به کار رود. یو و لی (2001)، رابطه‌ای را برای محاسبه بعد فرکتالی منفذ ارائه نمودند:

مناسب است (یو و همکاران، 2002). زو و دانگ (2004) نیز، بر مبنای خصوصیات فرکتال سطح منفذ خاک، یک مدل فرکتالی برای محاسبه هدایت هیدرولیکی نسبی خاک ارائه نمودند. مدل ارائه شده توسط آن‌ها در برخی خاک‌های رسی و یخ رفتی بهتر از مدل معلم-ون‌گونوختن عمل می‌کرد (زو، 2004). منگ و همکاران (2005) نظریه هندسه فرکتال را برای مدل کردن نفوذ غشاء رسوبی در غشاء راکتور زنده به کار بردند. آن‌ها دریافتند هدایت هیدرولیکی لایه تابعی از بعد فرکتالی سطح منفذ و پارامترهای ساختمان میکروسکوپی لایه است. شی و همکاران (2012)، مدلی فرکتالی برای هدایت هیدرولیکی نسبی و اشباع آب و گاز در لایه پخشیدگی گاز پلیمر غشاء الکتروولت پیل‌های سوختی پیشنهاد نمودند. نامبردگان نتایج مدل پیشنهادی خود را با داده‌های واقعی و نتایج سه مدل تجربی مقایسه نمودند. این مقایسه مشخص کرد نتایج مدل فرکتالی آن‌ها بر خلاف سه مدل تجربی انطباق خوبی با مقادیر اندازه‌گیری شده هدایت هیدرولیکی دارد.

با مروری بر مطالعات صورت گرفته مشاهده می‌شود اگر چه روابط مختلفی برای محاسبه تابع هدایت هیدرولیکی بر مبنای نظریه هندسه فرکتال‌ها ارائه شده است و گاهی شکل تابع آن‌ها ساده است ولی یا دارای ثابت‌های تجربی هستند و یا تعیین بعد فرکتالی در این مدل‌ها مشکل است. در برخی مدل‌ها نیز که رابطه‌ای ساده برای محاسبه بعد فرکتالی ارائه کردند این پارامتر را برای یک خاک در تمام مقادیر رطوبت ثابت فرض نمودند. بنابراین هدف از این تحقیق ارائه رابطه‌ای ساده برای محاسبه بعد فرکتالی منفذ و بعد فرکتالی لوله‌های موئین معوج خاک برای جریان غیراشباع به عنوان تابعی از میزان آب خاک و سپس ارائه رابطه‌ای ساده به منظور برآورد تابع هدایت هیدرولیکی خاک بر مبنای مدل فرکتالی توزیع اندازه منافذ خاک می‌باشد. در ادامه ابتدا خصوصیات فرکتال محیط متخلخل ارائه می‌شود.

#### تئوری مدل

#### بعد فرکتالی منفذ و لوله موئین معوج

در محیط متخلخل توزیع تجمعی اندازه منافذ از قانون مقیاس‌سازی فرکتالی پیروی می‌کند [یو و چنگ، 2002]:

$$N(L \geq \lambda) = \left( \frac{\lambda_{Max}}{\lambda} \right)^{D_f} \quad (1)$$

در رابطه سطح مقطع منافذ (رابطه 11)، مقادیر این پارامترها برای جریان غیراشباع به دست می‌آید:

$$(12)$$

$$D_f^{[\theta]} = d_E^{-\frac{In\theta}{In(\lambda_{\min}/\lambda_{\max})}}$$

$$(13)$$

$$L_t^{[\theta]} = \lambda^{1-D_f^{[\theta]}} L_0^{D_f^{[\theta]}}$$

$$(14)$$

$$\tau^{[\theta]} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \sqrt{1-\theta} + \sqrt{1-\varepsilon} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta}} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}}}{1 - \sqrt{1-\theta}} \right]$$

$$(15)$$

$$D_T^{[\theta]} = 1 + \frac{In\tau^{[\theta]}}{In(L_0/\lambda)}$$

$$(16)$$

$$A_p^{[\theta]} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda} \frac{\pi}{4} \lambda^2 dN(\lambda) = \frac{\pi}{4} \frac{D_f^{[\theta]}}{2-D_f^{[\theta]}} \lambda_{\max}^{D_f^{[\theta]}} \left[ \lambda^{2-D_f^{[\theta]}} - \lambda_{\min}^{2-D_f^{[\theta]}} \right]$$

#### تابع هدایت هیدرولیکی

به منظور مدل‌سازی فرکتالی تابع هدایت هیدرولیکی در محیط متخلخل، معادله پوازیه مبنای محاسبات قرار گرفت. شدت جریان از یک لوله موئین معوج با قطر  $\lambda$  با استفاده از معادله اصلاح شده هیگن - پوازی به دست می‌آید [دن، 1980]:

$$(17)$$

$$q^{[\theta]} = \frac{\pi \Delta P \lambda^4}{128 L_t^{[\theta]} \mu}$$

که در آن  $\mu$  لزجت مایع و  $\Delta P$  اختلاف فشار می‌باشد، سایر پارامترهای مدل قبلاً معرفی شده‌اند. سپس شدت جریان کل در مکش مشخص با استفاده از رابطه (17) و توجه به این نکته که منافذ با شعاع کوچک‌تر از شعاع منفذ متناظر با مکش مورد نظر آب - دار هستند محاسبه می‌شود:

$$D_f = d_E^{-\frac{In\varepsilon}{In(\lambda_{\min}/\lambda_{\max})}}$$

که در آن  $\varepsilon$  تخلخل و  $d_E$  بعد اقلیدسی است. در دو بعد مقدار آن 2 و در سه بعد مقدار آن 3 می‌باشد.

یو و چنگ (2002) نشان دادند که لوله‌های موئین معوج نیز رفتاری فرکتالی دارند:

$$(8)$$

$$L_t(\lambda) = \lambda^{1-D_f} L_0^{D_f}$$

که در آن  $L_t(\lambda)$  طول واقعی یا معوج،  $L_0$  طول ظاهری یا مستقیم مسیر جریان سیال و  $D_f$  بعد فرکتالی برای لوله - های موئین معوج است.

$$(9)$$

$$D_T = 1 + \frac{In\tau}{In(L_0/\lambda)}$$

در رابطه (9)،  $\tau$  عامل اعوجاج و برابر  $\frac{L_t(\lambda)}{L_0}$  است. یو

(30)، رابطه‌ای را برای محاسبه  $\tau$  ارائه نمود:

$$(10)$$

$$\tau = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \sqrt{1-\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}}}{1 - \sqrt{1-\varepsilon}} \right]$$

مسیر مستقیمی که سیال در محیط متخلخل طی می‌کند می‌تواند با استفاده از رابطه  $L_0 = \sqrt{A}$  تقریب زده شود،  $A$  مساحت کل جریان است و با استفاده از رابطه

$$A = \frac{A_p}{\varepsilon}$$

است:

$$(11)$$

$$A_p = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\pi}{4} \lambda^2 dN(\lambda) = \frac{\pi}{4} \frac{D_f}{2-D_f} \lambda_{\max}^{D_f} \left[ 1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)^{2-D_f} \right]$$

هنگامی که خاک غیراشباع باشد جریان در تمام منافذ برقرار نبوده و تنها منافذی که آب‌دار هستند در جریان شرکت دارند بنابراین با جای‌گذاری مقدار رطوبت ( $\theta$ ) به جای تخلخل کل خاک ( $\varepsilon$ ) در روابط مربوط به محاسبه بعد فرکتالی منفذ و عامل اعوجاج در بعد فرکتالی لوله موئین معوج (روابط 7 تا 10)، همچنین  $\lambda$  به جای  $\lambda_{\max}$

(18)

توجه به بافت خاک (جدول 2) ثابت فرض شد (ون گنوختن و همکاران، 1991).

برای به‌دست آوردن  $\lambda$ ، با استفاده از منحنی رطوبتی ون‌گنوختن با داشتن مقادیر مکش

$$h(\theta) = -\frac{1}{\alpha} \left( \frac{se(\theta)}{m} - 1 \right)^{\frac{1}{n}}$$

که در آن  $\alpha$  و  $n$  مقادیر

ثابت،  $se(\theta)$  درجه اشباع مؤثر که با  $\left[ \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right]$  داده

می‌شود ( $\theta_s$  و  $\theta_r$  به ترتیب مقدار رطوبت باقی‌مانده و اشباع خاک می‌باشند)، مشخص می‌شود و  $m$  به طور متداول مساوی با  $(1-1/n)$  در نظر گرفته می‌شود، قطر منفذ متناظر با هر مکش با استفاده از معادله یانگ-لاپلاس ( $h = 2\sigma \cos\alpha / r$ ) که در آن  $\sigma$  کشش سطحی،  $\alpha$  زاویه تماس مایع با سطح و  $r$  شعاع لوله مؤین است،  $\lambda = 2r$ ، بنابراین  $\lambda = 4\sigma \cos\alpha / h$  به‌دست می‌آید که مقدار حداقل و حداکثر آن به ترتیب مشخص‌کننده  $\lambda_{\min}$  و  $\lambda_{\max}$  می‌باشد. با مشخص شدن  $\lambda$  و معلوم بودن رطوبت در هر مکش، بعد فرکتالی منفذ و لوله مؤین در آن مکش به ترتیب با استفاده از روابط (12) و (15) محاسبه و در نهایت مقدار هدایت هیدرولیکی غیراشباع با استفاده از رابطه (19) برآورد می‌شود.

#### ارزیابی مدل

به منظور ارزیابی مدل‌های مورد بررسی از پارامترهای آماری ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE، رابطه 20)، هم‌چنین عوامل نسبت خطای متوسط هندسی (GMER، رابطه 21) و نسبت خطای انحراف استاندارد هندسی (GSDER، رابطه 22) استفاده شد.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{N}} \quad (20)$$

$$GMER = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(e_i)\right)$$

(21)

$$GSDER = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(e_i)\right)$$

$$Q^{[\theta]} = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda} q^{[\theta]} dM(\lambda) = \frac{\pi}{128\mu} \frac{D_f^{[\theta]}}{3-D_f^{[\theta]}+D_f^{[\theta]}} \frac{\Delta p}{L_0} L_0^{1-D_f^{[\theta]}} \lambda_{\max}^{D_f^{[\theta]}}$$

$$\left[ \lambda^{3-D_f^{[\theta]}+D_f^{[\theta]}} - \lambda_{\min}^{3-D_f^{[\theta]}+D_f^{[\theta]}} \right]$$

از طرفی طبق قانون داریسی،  $Q = \frac{KA}{\mu} \frac{\Delta P}{L_f}$ ، شدت

جریان متناسب با هدایت هیدرولیکی مجموعه لوله‌های مؤین است. بنابراین با مشخص بودن  $Q$  و  $A$  می‌توان تابع هدایت هیدرولیکی را به‌دست آورد:

(19)

$$k^{[\theta]} = \frac{\varepsilon}{32} \frac{2-D_f^{[\theta]}}{3-D_f^{[\theta]}+D_f^{[\theta]}} L_0^{1-D_f^{[\theta]}} \lambda_{\max}^{1+D_f^{[\theta]}} \left[ \frac{1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}\right)^{3-D_f^{[\theta]}+D_f^{[\theta]}}}{1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda}\right)^{2-D_f^{[\theta]}}} \right]$$

که در آن پارامترهای مدل قبلاً معرفی شده‌اند.

#### مواد و روش‌ها

برای بررسی کارایی مدل نهایی تابع هدایت هیدرولیکی خاک (معادله 19)، از داده‌های 40 نمونه خاک (شامل داده‌های اندازه‌گیری شده منحنی مشخصه رطوبتی، منحنی هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک، هدایت هیدرولیکی اشباع خاک و سایر موارد) بانک UNSODA (نمس و همکاران، 2001) استفاده شد. کلاس بافتی خاک‌های مورد مطالعه به همراه کد نمونه آن‌ها در جدول (1) ارائه شده است.

به منظور برآورد هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک‌های مورد بررسی در این تحقیق با روش فرکتالی ارائه شده باید ابتدا قطر منافذ خاک ( $\lambda$ ) محاسبه شود. برای این منظور می‌توان از منحنی دانه‌بندی یا منحنی مشخصه رطوبتی خاک استفاده نمود. در حال حاضر در بیش‌تر مطالعات مربوط به جریان آب در محیط غیراشباع و بسیاری از مدل‌های عددی که انتقال آب و املاح را در خاک شبیه‌سازی می‌کنند، از مدل منحنی رطوبتی ون-گنوختن استفاده می‌شود (سای و یه، 2012؛ اگنس و همکاران، 2007) لذا در این تحقیق از مدل مذکور برای محاسبه  $\lambda$  استفاده شد.

پارامترهای مدل ون‌گنوختن با استفاده از نرم‌افزار RETC (version 6.0) (ون گنوختن و همکاران، 1991) از روی داده‌های گزارش شده منحنی مشخصه رطوبتی خاک و با فرض  $m=(1-1/n)$  برآورد شد. ضمناً با توجه به این که نرم‌افزار RETC کلیه مقادیر رطوبت باقی‌مانده ( $\theta_r$ ) کم‌تر از 0/001 را با صفر تقریب می‌زند، مقدار  $\theta_r$  با

(22)

$$GSDER = \exp \left[ \left( \frac{1}{n-1} \sum [Ln(e_i) - Ln(GMER)]^2 \right)^{1/2} \right]$$

جدول 1- تفکیک نمونه خاک‌ها براساس بافت (بانک UNSODA)

بافت خاک	کد نمونه خاک
شن <sup>+</sup> (3)	2100-1240-1014
شن لومی (10)	2105-2104-2103-2102-2101-1015-1013-1012-1011-1010
لوم (4)	2321-2320-1261-1260
لوم رسی (1)	1180
لوم رسی شنی (2)	1184-1183
لوم شنی (4)	2150-1392-1391-1390
لوم رسی سیلتی (6)	3112-3111-3110-3102-3101-3100
لوم سیلتی (5)	3091-3090-2232-1331-1280
سیلت (1)	1330
رس (3)	3281-1400-1181
رس سیلتی (1)	1383

<sup>+</sup> اعداد داخل پرانتز تعداد خاک‌ها می‌باشد.

جدول 2- مقادیر پیشنهادی برای رطوبت باقی‌مانده بر اساس بافت خاک (ون گنوختن و همکاران، 1991)

بافت خاک	$\Theta_r$
شن	0/045
شن لومی	0/057
لوم	0/078
لوم رسی	0/095
لوم رسی شنی	0/1
لوم شنی	0/065
لوم رسی سیلتی	0/089
لوم سیلتی	0/067
سیلت	0/034
رس	0/068
رس سیلتی	0/07

و با انحراف مقادیر پیش‌بینی شده از مقادیر گزارش شده افزایش می‌یابد. بنابراین بهترین مدل آن است که GMER نزدیک به یک و GSDER اندک داشته باشد، هم‌چنین مقدار RMSE آن نیز اندک باشد.

### نتایج

#### بعد فرکتالی منفذ و لوله مؤین معوج

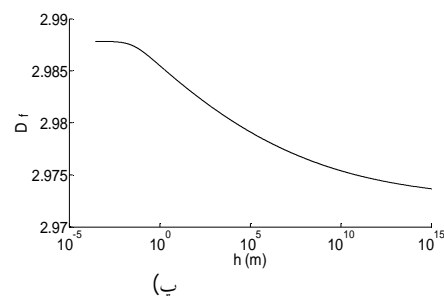
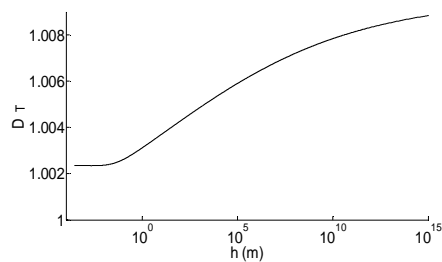
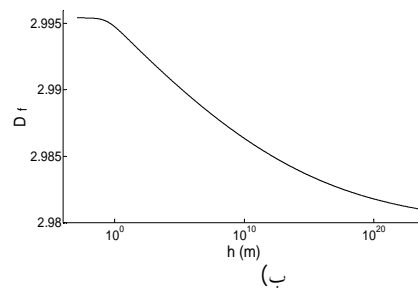
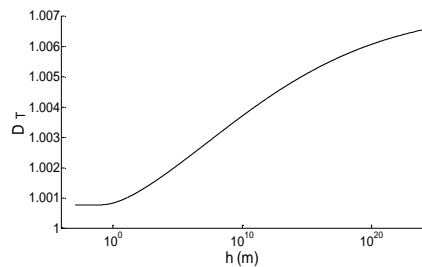
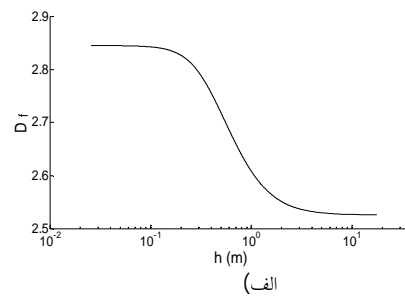
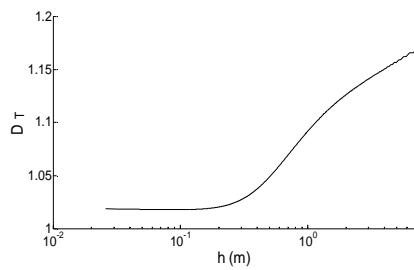
منحنی رابطه بعد فرکتالی منفذ و بعد فرکتالی لوله معوج با مکش آب خاک برای 3 نمونه خاک با بافت شن، لوم و رس در شکل (1) ارائه شده است. به طور کلی رابطه ی بعد فرکتالی منفذ با مکش آب خاک نزولی بوده

در تمام شاخص‌های فوق،  $y_i$  مقادیر واقعی (گزارش شده)،  $\hat{y}_i$  مقادیر پیش‌بینی شده، n تعداد کل مشاهدات و  $e_i$  نسبت

خطا،  $\hat{e}_i = \hat{y}_i / y_i$  است. RMSE برابر صفر بیانگر انطباق کامل بین مقادیر گزارش و تخمین زده شده است، ولی در عمل مقدار این عامل صفر نمی‌شود و همواره بزرگ‌تر از صفر است. GMER برابر با یک حاکی از تطابق کامل میان مقادیر گزارش شده و تخمین زده شده است. GMER کم‌تر از یک نشان‌دهنده آن است که مقادیر تخمین زده شده کم‌تر از مقادیر واقعی هستند و بالعکس. GSDER برابر با یک بیانگر دقیق‌ترین حالت ممکن است

افزایش می‌یابد.

در حالی که بعد فرکتالی لوله معوج با افزایش مکش



شکل 1- رابطه بعد فرکتالی منفذ با مکش آب خاک (سمت چپ) و رابطه بعد فرکتالی لوله موئین معوج با مکش آب خاک (سمت راست) برای خاک‌های با بافت (الف) شن (کد 1014)، (ب) رس (کد 1181) و (پ) لوم (کد 2320)

تطابق در محدوده ی گزارش شده قابل قبول به نظر می‌رسد. ارزیابی مدل در قسمت بعد انجام می‌شود.

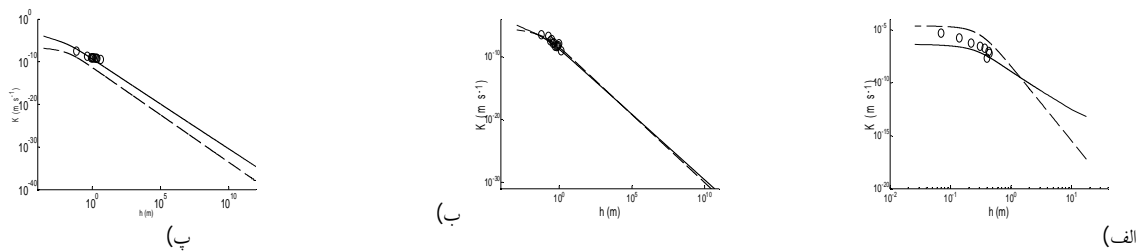
ارزیابی مدل

(الف) پارامترهای آماری

انحراف معیار، میانگین و ضریب تغییرات پارامتر RMSE، همچنین دو عامل GMER و GSDER روش-های مورد بررسی در جدول (3) ارائه شده است. تمامی پارامترهای آماری در محدوده ی مناسب قرار دارند.

تابع هدایت هیدرولیکی خاک

به دلیل این که در محاسبات از مدل منحنی رطوبتی و نگونختن استفاده شد نتایج به دست آمده از روش فرکتالی ارائه شده برای برآورد K نیز با نتایج مدل و نگونختن مقایسه شد. منحنی تابع هدایت هیدرولیکی فرکتالی و نگونختن برای 3 نمونه خاک با بافت شن، لوم و رس در شکل (2) نشان داده شده است. گرچه مقادیر اندازه گیری شده ی هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک برای تمام دامنه ی مکش گزارش نشده است ولی



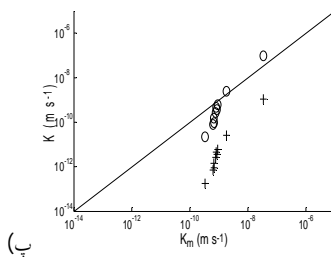
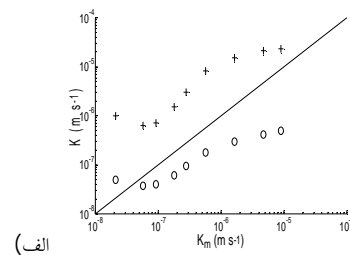
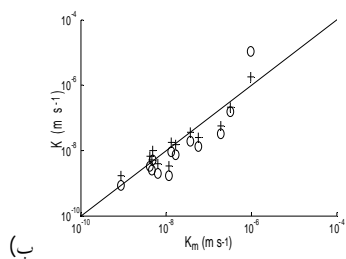
شکل 2- منحنی تابع هدایت هیدرولیکی مدل فرکتالی (خط ممتد)، مدل ون گنوختن (خط چین) و نقاط تو خالی مقادیر گزارش شده هدایت هیدرولیکی (بانک UNSODA)، برای خاک‌های با بافت (الف) شن (کد 1014)، (ب) رس (کد 1181) و (پ) لوم (کد 2320).

جدول 3- آمار توصیفی پارامترهای آماری در روش فرکتالی و روش ون گنوختن

مدل ون گنوختن			مدل فرکتالی		
ضریب تعییرات	میانگین	انحراف معیار	ضریب تعییرات	میانگین	انحراف معیار
RMSE					
2/04	3/76E-6	7/69E-6	2/33	4/54E-6	1/06E-5
GMER					
1/99	3/64E+00	7/26E+00	1/88	0/3E+00	0/57E+00
GSDER					
0/82	3/52E+00	2/87E+00	0/57	3/11E+00	1/78E+00

شده هدایت هیدرولیکی غیراشباع برای 3 نمونه از خاک‌ها با بافت متفاوت در شکل (3) ترسیم شده است.

(ب): مقایسه با خط یک به یک: هدایت هیدرولیکی غیراشباع برآوردی خاک به کمک روش فرکتالی ارائه شده در این تحقیق در مقابل مقادیر گزارش



شکل 3- مقادیر گزارش شده و برآورد شده هدایت هیدرولیکی غیراشباع در مقیاس لگاریتمی برای خاک‌های با بافت (الف) شن (کد 1014)، (ب) رس (کد 1181) و (پ) لوم (کد 2320). (O) مدل فرکتالی، (+) مدل ون گنوختن و (-) خط یک به یک



## بحث

## بعد فرکتالی منفذ و لوله موئین معوج

همان‌طور که در شکل (1) مشاهده می‌شود در منحنی رابطه بعد فرکتالی منفذ با مکش آب خاک (منحنی سمت چپ)، با افزایش مکش به دلیل کاهش میزان آب خاک، بعد فرکتالی منفذ کاهش می‌یابد و مقدار آن در مکش‌های مختلف در خاک‌های با بافت متفاوت بین 2/34 تا 2/99 تغییر می‌کند (مقدار آن در خاک‌های شنی > لومی > رسی است) در حالی که در منحنی رابطه بعد فرکتالی لوله معوج (منحنی سمت راست در شکل 1) بعد فرکتالی لوله معوج با افزایش مکش افزایش می‌یابد زیرا با افزایش مکش، میزان آب خاک کاهش یافته و مسیر جریان پر پیچ و خم‌تر می‌شود. مقدار DT در مکش‌های مختلف در خاک‌های با بافت متفاوت بین 1/001 تا 1/35 تغییر می‌کند (مقدار آن در خاک‌های شنی < لومی < رسی است). مشاهده شد با افزایش مکش، پارامتر DT که نشان‌دهنده اعوجاج مسیر جریان می‌باشد در خاک‌های شنی بیش‌تر از خاک‌های رسی است و بنابراین هدایت هیدرولیکی غیراشباع در یک مکش مشخص در خاک‌های شنی به دلیل اعوجاج بیشتر مسیر جریان کم‌تر از خاک‌های رسی است که نتایج منطبق بر واقعیت می‌باشد. ویت‌کرفت و تایلر (1988) گزارش کردند با شبیه‌سازی مونت کارلو برای جریان در محیط متخلخل، بعد فرکتالی لوله معوج 1/08 خواهد بود. یو (2005) مقدار این پارامتر را بین 1/0-1/2 برای تخلخل 0/36 تا 1 گزارش کردند. هرچند مطالعات قبلی به متغیر بودن بعد فرکتالی لوله معوج در یک خاک مشخص نپرداختند ولی مشاهده می‌شود مقدار این پارامتر در خاک‌های با تخلخل کم (خاک‌های با بافت شن) بیش‌تر از خاک‌های با تخلخل زیاد (خاک‌های با بافت رس) است که مشابه نتایج به‌دست آمده در این تحقیق است.

## تابع هدایت هیدرولیکی خاک

همان‌طور که در شکل (2) مشاهده می‌شود نتایج مدل‌سازی تابع هدایت هیدرولیکی خاک برای بافت رس و لوم نسبت به بافت شن بهتر عمل نموده و مقادیر برآوردی K به روش فرکتالی نسبت به مدل ون‌گونوختن به مقادیر گزارش شده نزدیک‌تر می‌باشند.

## ارزیابی مدل

(الف) پارامترهای آماری: نمونه‌ای دارای بهترین نتایج است که کم‌ترین مقادیر RMSE و GSDER را داشته و عامل GMER آن نیز نزدیک به یک باشد. با توجه به نتایج جدول (3)، ریشه میانگین مربعات خطا در مدل ون‌گونوختن کم‌تر از مدل فرکتالی است این در حالی است که

میانگین نسبت خطای متوسط هندسی و نسبت خطای انحراف استاندارد هندسی در مدل فرکتالی کم‌تر از مدل ون‌گونوختن می‌باشد. به استثنای پارامتر RMSE مدل ون‌گونوختن دارای بیش‌ترین ضریب تغییرات می‌باشد. بنابراین از لحاظ دو پارامتر GMER و GSDER نتایج مدل فرکتالی بهتر از مدل ون‌گونوختن است.

(ب): مقایسه با خط یک به یک: همان‌طور که در شکل (3) مشاهده می‌شود، مدل ون‌گونوختن در بافت شن (کد 1014) هدایت هیدرولیکی را بیش‌تر و مدل فرکتالی کم‌تر از مقادیر واقعی برآورد می‌کند ولی در مدل فرکتالی در مقادیر هدایت هیدرولیکی کم‌تر (به عبارتی در رطوبت‌های کم‌تر) نسبت به مدل ون‌گونوختن برآوردها بهتر است. در خاک با بافت رس (کد 1181) هر دو مدل برآورد خوبی از K داشته و تفاوت چندانی با یکدیگر و مقادیر گزارش شده ندارند ولی در کد نمونه (2320) با بافت لوم نتایج مدل فرکتالی بهتر از مدل ون‌گونوختن می‌باشد.

## نتیجه‌گیری

در این تحقیق بر مبنای مدل فرکتالی توزیع اندازه منافذ یو و چنگ (2002)، بعد فرکتالی منفذ و لوله‌های موئین معوج برای جریان غیراشباع بازنویسی شد. سپس تابع هدایت هیدرولیکی خاک با استفاده از رابطه پوازی و مدل لوله‌های موئین برای شدت جریان در یک محیط متخلخل، بر مبنای هندسه فرکتال ارائه گردید. نتایج این مدل برای 40 نمونه از خاک‌های بانک خاک UNSODA بررسی شد. نتایج نشان داد بعد فرکتالی منفذ با افزایش مکش آب خاک به دلیل کاهش میزان رطوبت خاک، کاهش می‌یابد و مقدار آن در خاک‌های شنی > لومی > رسی است. در حالی که بعد فرکتالی لوله معوج با افزایش مکش افزایش می‌یابد زیرا با افزایش مکش، میزان آب خاک کاهش یافته و اعوجاج مسیر جریان بیش‌تر می‌شود. با افزایش مکش، پارامتر DT که نشان‌دهنده اعوجاج مسیر جریان می‌باشد در خاک‌های شنی بیش‌تر از خاک‌های رسی است و بنابراین هدایت هیدرولیکی غیراشباع در یک مکش مشخص در خاک‌های شنی به دلیل اعوجاج بیش‌تر مسیر جریان کم‌تر از خاک‌های رسی است. نتایج مقایسه هدایت هیدرولیکی غیراشباع برآوردی به روش فرکتالی ارائه شده در این تحقیق با مقادیر گزارش شده آن و مدل ون‌گونوختن نشان داد ریشه میانگین مربعات خطا در مدل ون‌گونوختن کم‌تر از مدل فرکتالی است در حالی که میانگین نسبت خطای متوسط هندسی و نسبت خطای انحراف استاندارد هندسی در مدل فرکتالی کم‌تر از مدل ون‌گونوختن می‌باشد. به استثنای پارامتر RMSE مدل ون-

گنوختن دارای بیش‌ترین ضریب تغییرات می‌باشد. بنابراین از لحاظ دو پارامتر GMER و GSDEr نتایج مدل فرکتالی بهتر از مدل ون‌گنوختن است

### فهرست منابع:

1. Agnese C., Blanda F., Drago A., Iovino M., Minacapilli M., Provenzano G., Rallo G., and Sciortino M. 2007. Assessing the agro hydrological SWAP model to simulate soil water balance in typical Mediterranean crops. *Geophysical Research Abstracts* 9, 08146.
2. Binley A., Cassiani G., Middleton R., and Winship P. 2002. Vadose zone flow model parameterisation using cross-borehole radar and resistivity imaging. *Journal of Hydrology*, 267 (3-4): 147-159.
3. Binley A., Winship P., Middleton R., Pakar M., and West J. 2001. High- resolution characterization of vadose zone dynamics using cross- borehole radar. *Water Resour. Research*. 37: 2639-2652.
4. Burdine N.T. 1953. Relative permeability calculations from pore-size distribution data. *Transactions of the American Institute of Mining, Metallurgical and Petroleum Engineers*. 198: 71–77. (Trans. Am. Inst. Min. Metall. Pet. Eng)
5. Crawford J. W., Baveye P., Grindord P., and Rappoldt C. 1999. Application of fractals to soil Properties, landscape patterns, and solute transport in porous media in Assessment of non-point source pollution in the vadose zone, *Geophysical monograph*. 108: 151- 164, American Geophysical Union.
6. Crawford J.W. 1994. The relationship between structure and the hydraulic conductivity of soil. *European Journal of Soil Science*. 45: 493-501.
7. Denn M. M. 1980. *Process Fluid Mechanics*. Prentice-Hall, England cliff, New Jersey.
8. Dubreuil-Boisclair C., Gloaguen E., Marcotte D., and Giroux B. 2011. Heterogeneous aquifer characterization from ground-penetrating radar tomography and borehole hydrogeophysical data using nonlinear Bayesian simulations. *Geophysics*. 76 (4): 13-25.
9. Elliot T.R., Reynolds W.D., and Heck R.J. 2010. Use of existing pore models and X-ray computed tomography to predict saturated soil hydraulic conductivity. *Geoderma*. 156 (3-4): 133-142.
10. Finsterle S., and Faybishenko B. 1999. Inverse modeling of a radial multistep outflow experiment for determining unsaturated hydraulic properties. *Water Resources Research*. 22: 431-444.
11. Fuentes C., Vauclin M., and Parlange J.I. 1996. A note on the soil–water conductivity of a fractal soil. *Transport in Porous Media*. 23: 31–36.
12. Gueting N., Vienken T., Klotzsche A., van der Kruk J., Vanderborght J., Caers J., Vereecken H., and Englert A. 2017. High resolution aquifer characterization using cross hole GPR full-waveform tomography: Comparison with direct-push and tracer test data, *Water Resour. Res.*, 53: 49–72.
13. Hilal M. H. and Anwar N. M. 2016. Vital role of water flow and moisture distribution in soils and the necessity of a new out-look and simulation modeling of soil- water relations. *Journal of America science*. 12 (7):6- 18.
14. Hudson D. B., Wierenga P. J. and Hills R. G. 1996. Unsaturated hydraulic properties from upward flow into soil cores. *Soil Science Society of America Journal*. 60: 388-396.
15. Mandelbrot B. 1975. Stochastic models for the earth's relief, the shape and fractal dimension of coastlines and the number area rule for islands. *Proc. National Acad. Sc USA*. 72 (10): 2825-2828.

16. Meng F.G., Zhang H.M., Li Y.s., Zhang X.W., and Yang F.G. 2005. Application of fractal permeation model to investigate membrane fouling in membrane bioreactor. *Journal of Membrane Science*. 262: 107-116.
17. Mualem Y. 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resources Research*. 12:513– 22.
18. Nasta P., Huynh S., and Hopmans J. W. 2010. Simplified Multistep Outflow Method to Estimate Unsaturated Hydraulic Functions for Coarse-Textured Soils. *Soil Science Society of America Journal*. 75 (2): 418-425.
19. Naveed M., Moldrup P., Schaap M.G., Tuller M., Kulkarni R., Vogel H.J., de Jonge L. W. 2016. Prediction of biopore- and matrix-dominated flow from X-ray CT-derived macropore network characteristics. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 20: 4017–4030.
20. Nemes A., Schaap M.G., Leij F.J., and Wösten J.H.M. 2001. Description of the unsaturated soil hydraulic database UNSODA version 2.0. *Journal of Hydrology*. 251(3–4): 151–162.
21. Rieu M., and Sposito G. 1991. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I. Theory. *Soil Science Society of America Journal*. 55: 1231–1238.
22. Schindler U., Müller L., and Eulenstein F. 2017. Hydraulic performance of horticultural substrates-1. Method for measuring the hydraulic quality indicators. *Horticulture Journal*. 3, 5: 1-7.
23. Schindler U., Durner W., von Unold G., and Müller L. 2010. Evaporation method for measuring unsaturated hydraulic properties of soils: extending the measurement range. *Soil Science Society of America Journal*. 74: 1071-1083.
24. Shepard J. S. 1993. Using a fractal model to compute the hydraulic conductivity function. *Soil Science Society of America Journal*. 57: 300-306.
25. Shi Y., Cheng S., and Quan S. 2012. Fractal-based theoretical model on saturation and relative permeability in the gas diffusion layer of polymer electrolyte membrane fuel cells. *Journal of Power Sources*. 209: 130-140.
26. Sriboonlue V., Srisuk K., Konyai S., and Khetkratok N. 2006. Unsaturated Hydraulic Conductivity for Upward Flow in Soil. *Proceedings of the 4th International Conference on Unsaturated Soils*. April 2–6. Carefree, Arizona, USA.
27. Stolte J., Freijer J.L., Bouten W., Dirksen C., Halbertsma J.M., Van Dam J.C., Van Den Berg J.A., Veerman G.J., and Wosten J.H.M. 1994. Comparison of six methods to determine unsaturated soil hydraulic conductivity. *Soil Science Society of America Journal*. 58: 1596–1603.
28. Tsai C.H., and Yeh G.T. 2012. Retention Characteristics for Multiple-Phase Fluid Systems. *Terrestrial, Atmospheric and Oceanic Sciences*. 23 (4), DOI code: 10.3319/TAO.2012. 02.14.01(Hy).
29. Tyler S.W., Wheatcraft S.W. 1990. Fractal process in soil water retention. *Water Resources Research*. 26: 1047–54.
30. van Genuchten M.Th., Leij F. J., and Yates S.R. 1991. The RETC code for quantifying the hydraulic functions of unsaturated soils. (Available at [http://www.pc-progress.cz/Pg\\_RetC.htm](http://www.pc-progress.cz/Pg_RetC.htm); verified 14 may. 2014). Report No. EPA/600/2–91/065. R.S. Kerr Environmental Research Laboratory. U. S. Environmental Protection Agency, Ada, Oklahoma.
31. Wheatcraft S. W., and Tyler S.W. 1988. An explanation of scale-dependent dispersivity in heterogeneous aquifers using concepts of fractal geometry. *Water Resources Research* 24: 566–578.
32. Xu Y.F. 2004. Calculation of unsaturated hydraulic conductivity using a fractal model for the pore-size distribution. *Computers and Geotechnics*. 31: 549–557.

33. Xu Y.F., Dong P. 2004. Fractal approach to hydraulic properties in unsaturated porous media. *Chaos, Solitons and Fractals*. 19: 327-337.
34. Yu B.M. 2005. Fractal character for tortuous stream tubes in porous media. *Chinese Physics Letters*. 22 (1): 158-160.
35. Yu B.M. and Cheng P. 2002. A fractal permeability model for bi-dispersed porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 45: 2983-2993.
36. Yu B.M. and Li J.H. 2001. Some fractal characters of porous media. *Fractals*. 9: 365-372.
37. Yu B.M., Lee L.J., and Cao H.Q. 2002. A fractal in-plane permeability model for fabrics. *Polymer composites*. 23: 201-221.
38. Zhou Q. Y., Shimada J., and Sato A. 2001. Three-dimensional spatial and temporal monitoring of soil water content using electrical resistivity tomography. *Water Resources Research*. 37: 273-285.

## Estimation of Soil Hydraulic Conductivity Function Based on Fractal Geometry and the Capillary Tube Models

S. Omid and B. Ghahraman<sup>1</sup>

PhD Candidate of Irrigation and Drainage, Ferdowsi University of Mashhad;

E-mail: Omid\_samira@yahoo.com.

Professor of Irrigation and Drainage, Ferdowsi University of Mashhad;

E-mail: bijangh@um.ac.ir

Received: July, 2017 and Accepted: October, 2017

### Abstract

In this study, soil hydraulic conductivity function was modeled based on fractal geometry and capillary tube models. The proposed model is expressed as a function of the pore diameter, apparent flow path length, pore fractal dimension and tortuosity fractal dimension. In this study, the relationships concerning calculation of the pore fractal dimension and tortuosity fractal dimension for unsaturated flow was presented as a function of the soil water content. The advantage of this model is lack of empirical constants. Van Genuchten soil water retention curve was used to calculate the pore diameters. In this research, the model was evaluated by using 40 soil samples with 11 different soil textures covering sandy, loam, and clay from the UNSODA database. Results of comparison of unsaturated hydraulic conductivity estimated with fractal model presented in this study and the reported amounts of Van Genuchten model showed that the root mean square error (RMSE) of van Genuchten model was less than the fractal model, while the ratio of geometric mean error (GME) and standard deviation error of fractal geometry model was less than the van Genuchten model. Van Genuchten model had the highest coefficients of variation, with the exception of RMSE parameters. In terms of GMER and GSDER, fractal model was more reliable than the van Genuchten model.

**Keywords:** Soil database UNSODA, Pore fractal dimension, Tortuosity fractal dimension

---

<sup>1</sup> Corresponding author: Water Engineer Department, Faculty of Agriculture, Ferdowsi University of Mashhad